Guía de Problemas Nº6: *ondas mecánicas*

PROBLEMA 1: Una onda sinusoidal viajera es descripta por la función:

$$y(\mathrm{x},\mathrm{t}) = 0.2\,\mathrm{sen}(0.4\,\mathrm{x} - 30\,\mathrm{t}),$$

Donde x e y están en metros y t en segundos. Determinar para esta onda (a) la amplitud, (b) la frecuencia angular, (c) el número de onda, (d) la longitud de onda, y (e) la velocidad de la onda, y (f) la dirección de movimiento.

PROBLEMA 2: En t_0 un pulso transversal en una cuerda esta descripto por una función:

$$y(\mathrm{x}) = \frac{10}{x^2 + 2}$$

Escribir la función que describe este pulso viajando en la dirección de las x positivas con una velocidad de 4.50m/s.

PROBLEMA 3: Cuando una cuerda está vibrando con una frecuencia de 5 Hz, se produce una onda transversa de 50 cm de longitud de onda. Determine la velocidad de las ondas a lo largo del cable.

PROBLEMA 4: Una onda descripta por la función:

$$y(x,\mathrm{t}) = 0.1\sin(0.5\,\mathrm{x} - 20\,\mathrm{t}),$$

mostrar que la cuerda en x=2 m ejecuta un movimiento armónico simple. Determine la frecuencia de oscilación en este punto.

PROBLEMA 5: Una cuerda tienen 4 m de largo y masa 0.2 kg. Un pulso viaja cuatro veces de ida y vuelta a lo largo de la cuerda en 0.8 s. ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

PROBLEMA 6: Un astronauta en la Luna desea medir la aceleración de la gravedad usando pulsos viajeros en un cable del que pende una masa. Asumir que la cuerda tiene una masa de 4 g, una longitud de 1.6 m, y el objeto suspendido tiene 3 kg. Un pulso requiere 36.1 ms en recorrer el cable. Calcular la aceleración de la gravedad en la Luna a partir de estos datos. Ayuda: puede despreciar la masa del cable.

PROBLEMA 7: Un fenómeno ondulatorio típico es el "batido" o "pulsación", proveniente de sumar dos ondas viajeras de la misma amplitud ε_0 y frecuencias ν_1 y ν_2 muy próximas, i.e.: $\nu_1 = \nu_2 + 2\,\delta$, donde $\delta \ll \nu_2$. La suma es:

$$\varepsilon(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \varepsilon_0 \left\{ sen\left[2\pi\nu_1 \left(\frac{x}{c} - t \right) + \phi_1 \right] + sen\left[2\pi\nu_2 \left(\frac{x}{c} - t \right) + \phi_2 \right] \right\}.$$

Demostrar que la frecuencia de la onda es $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$, y la amplitud es:

$$\varepsilon_0{}' = 2\,\varepsilon_0 \cos\left[2\pi\,\delta\left(\frac{x}{c}-t\right)+\frac{\Delta\phi}{2}\right],$$

donde $\Delta\phi=\phi_1-\phi_2$. Ayuda: usar relaciones trigonométricas.

PROBLEMA 8: Cuando se superponen ondas viajeras de igual amplitud y frecuencia, pero que viajan en direcciones opuestas se obtienen ondas estacionarias. Dada la suma (superposición) de estas dos ondas:

$$\varepsilon(\mathrm{x,t}) = \varepsilon_0\left\{sen\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+ct)+\phi_1\right]+sen\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+\phi_2\right]\right\},$$

Demostrar que la suma es:

$$\varepsilon(\mathrm{x,t}) = 2\varepsilon_0\left\{sen\left[\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}ct+\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right]\right\}.$$

Graficar cualitativamente.

PROBLEMA 9: En el problema anterior, asumiendo $\phi_1=\phi_2=0$, mostrar que los nodos de la onda estacionaria están dados por la expresión:

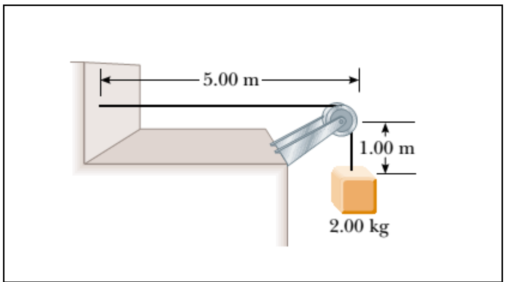
$$\frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi$$

PROBLEMA 10: Mostrar que la función de onda:

$$y(\mathrm{x,t}) = A\mathrm{e}^{b(\mathrm{x-vt})},$$

Donde b es una constante, es una solución de la ecuación de ondas.

PROBLEMA 11: ***Resuelto.*** Una cuerda uniforme tiene masa 0.300 kg y longitud 6.00 m. La cuerda pasa por una polea y soporta un peso de 2.00 kg. Encontrar la velocidad de un pulso viajando por esta cuerda.



Solución: La tensión de la cuerda es

$$T = m\,g = 2.00\,kg\;9.80\,m/s^2 = 19.6\,N,$$

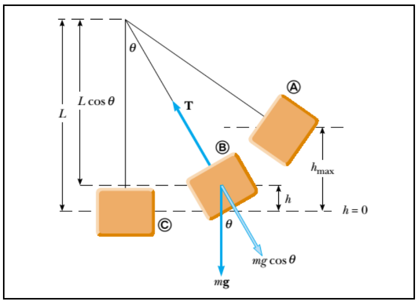
(Observar los dígitos significativos en este cálculo. La masa de la cuerda se considera despreciable en el cálculo de la tensión). La masa por unidad de longitud de la cuerda es:

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{0.300\,kg}{6.00\,m} = 0.500\,kg/m,$$

Por lo tanto la velocidad de la onda es:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{19.6\,N}{0.0500\,\mathrm{kg/m}}} = 19.8\,m/s.$$

PROBLEMA 12: Si en el problema anterior la masa está oscilando con una amplitud de 20 grados, ¿Cuál es la máxima y la mínima velocidad de propagación de las ondas en esta cuerda?
Solución: la sumatoria de fuerzas en la dirección radial para un ángulo arbitrario θ es:



$$\sum F = T - m\,g\cos\theta = m\frac{v_b^{\,2}}{l},$$

Donde la aceleración de la masa es centrípeta, l es la longitud del tramo vertical de la cuerda, y v_b *es la velocidad de la masa. Usando métodos de conservación de energía tenemos:*

$$E_A = E_B,$$

$$m\,g\,h_{\max} = m\,g\,h + \frac{1}{2}m\,v_b^{\,2},$$

$$m v_b^{\,2} = 2\,m\,g\,(\mathrm{h}_{\max} - \mathrm{h}).$$

Por lo tanto:

$$T = m\,g\left[\frac{2\,(\mathrm{h}_{\max} - \mathrm{h})}{l} + \cos\theta\right]$$

El valor máximo de T ocurre cuando $\theta = 0$, *y* $h = 0$, *en el punto más bajo, mientras que el mínimo de T ocurre en el punto más alto. Entonces:*

$$T_{\max} = m\,g\left(1 + \frac{2\,h_{\max}}{l}\right),$$

y

$$T_{\min} = m\,g\cos\theta_{\max},$$

Finalmente tenemos:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{T_{\max}}{\mu}} = 21.0\; m/s,$$

y

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{T_{\min}}{\mu}} = 19.2\; m/s.$$

Observar que podríamos dejar la velocidad de propagación simplemente como función del ángulo θ.