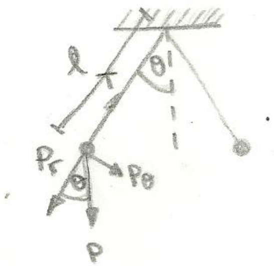
31



e_r) $-T + P_r = m \cdot a_r = m(\cancel{\ddot{r}}^{0} - r\dot{\theta}^2)$ (1)

e_θ) $-P_\theta = m\, a_\theta = m(r\ddot{\theta} + \cancel{2\dot{r}}^{0}\dot{\theta})$

$-\text{sen}\,\theta\, \cancel{m} g = \cancel{m}\, l\, \ddot{\theta}$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0}$$ para todo θ

a)

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\theta = 0}$$ aproximacion para θ chicos (2)

Si $\omega = \sqrt{g/l}$: $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ $(\omega \neq \dot{\theta})$

Una de las soluciones de ésta ED es:

$\theta = A \cos(\omega t + \psi)$

$\dot{\theta} = -A\,\text{sen}(\omega t + \psi)\,\omega$

$\ddot{\theta} = -A \cos(\omega t + \psi)\,\omega^2$

Ej: Si para $t = 0$, $\theta = \theta_0$ y $\dot{\theta} = 0$

- $0 = -A\,\text{sen}(\psi) \cdot \omega \rightarrow \text{sen}(\psi) = 0$
  $\psi = 0$
- $\theta_0 = A\cos(0) \rightarrow A = \theta_0$

$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \rightarrow \cancel{-A\cos(\omega t + \psi)\omega^2} + \cancel{\omega^2 A \cos(\omega t + \psi)} = 0$

T (periodo): Si la diferencia de los argumentos del cos es 2π, se cumple un ciclo:

$$\omega(\cancel{t}+T)+\cancel{\psi}-(\cancel{\omega \cdot t}+\cancel{\psi})=2\pi$$

$$\omega T = 2\pi \rightarrow \boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}=\sqrt{l/g}\cdot 2\pi}$$

b) $$\boxed{\begin{aligned} s &= lA\cos(\omega t+\psi) \\ v &= -lA\omega \operatorname{sen}(\omega t+\psi) \\ a &= -lA\omega^2\cos(\omega t+\psi) \end{aligned}}$$

F (frecuencia): c)

$$\boxed{F=\frac{1}{T}=\sqrt{g/l}\cdot\frac{1}{2\pi}}$$

De (1):

$$T = ml\dot\theta^2+\cos\theta\cdot mg = ml\dot\theta^2+\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)mg \qquad (3)$$

De (2):

$$\ddot\theta=-\frac{g}{l}\theta \rightarrow \frac{d\dot\theta}{d\theta}\cdot\dot\theta=-\frac{g}{l}\theta \rightarrow \frac{\dot\theta^2}{\cancel{2}}-\frac{\dot\theta_0^2}{\cancel{2}}=-\frac{g}{\cancel{2}l}(\theta^2-\theta_0^2)\rightarrow \dot\theta^2=-\frac{g}{l}(\theta^2-\theta_0^2)+\dot\theta_0^2 \qquad (4)$$

En (3):

$$T=ml\left(-\frac{g}{l}(\theta^2-\theta_0^2)+\dot\theta_0^2\right)+\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)mg$$

$$T=-mg\theta^2+mg\theta_0^2+ml\dot\theta_0^2+mg-\frac{mg}{2}\theta^2$$

$$T=-\frac{3}{2}mg\theta^2+mg\theta_0^2+ml\dot\theta_0^2+mg$$

Claramente T es max cuando $\theta=0$

d) $$\boxed{T_{max}=mg(\theta_0^2+1)+ml\dot\theta_0^2}$$

$$v=v_\theta=r\dot\theta \overset{(4)}{=} l\sqrt{\frac{g}{l}(\theta_0^2-\theta^2)+\dot\theta_0^2}=\sqrt{gl(\theta_0^2-\theta^2)+\dot\theta_0^2} \qquad (5)$$

$\therefore$ v es max cuando $\theta=0$.

$$a_\theta=r\ddot\theta \overset{(2)}{=} \cancel{l}\left(-\frac{g}{\cancel{l}}\theta\right)=-g\cdot\theta$$

$\therefore$ a_θ es max en los instantes en los que θ es max (en modulo)

θ_{max} se puede calcular con la ec. (5), para $v=0$ (despejo θ para ver la tendencia)

Nota: Siempre se consideraron las aproximaciones propuestas, lo cual hace que las ecuaciones sean válidas solo para ángulos pequeños ($\lesssim 15°$)