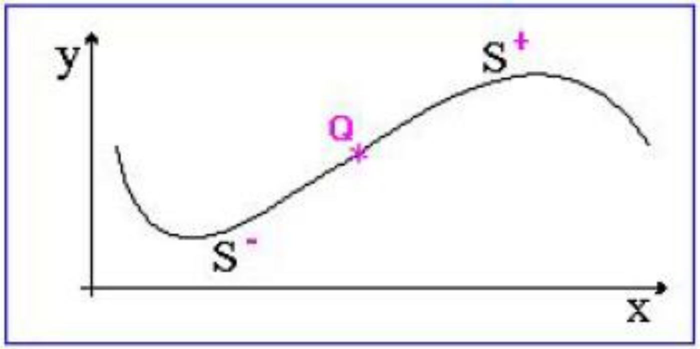
# CINEMÁTICA

Coordenadas Intrínsecas

# Coordenadas Intrínsecas




Trayectoria plana y pre-definida

$$y = f(x)$$

Posición

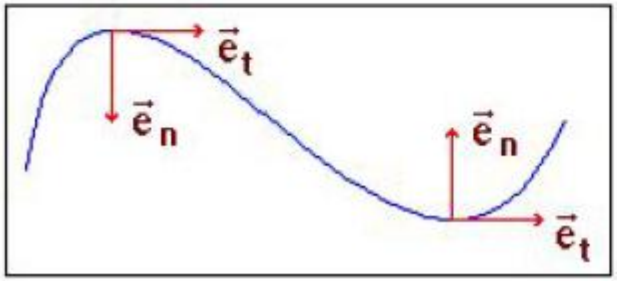
$$s = s(t)$$

Velocidad

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}} \longrightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \dot{s}(t)\,\vec{e}_t}$$

Aceleración

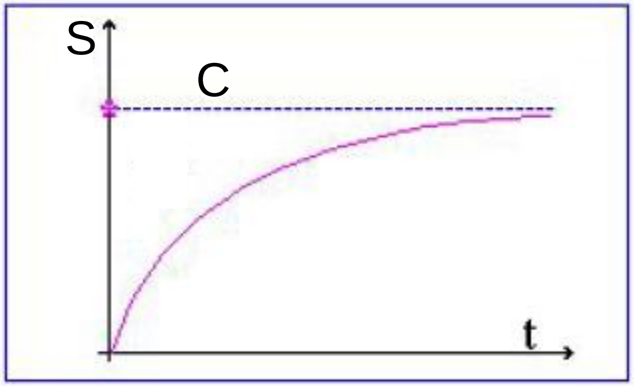
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \longrightarrow \boxed{\vec{a}(t) = \ddot{s}(t)\,\vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2(t)}{\rho}\,\vec{e}_n}$$



# Coordenadas Intrínsecas: ejemplo I

Supongamos que partimos de la siguiente expresión para la posición:

$$S(t) = C\left(1 - e^{-kt}\right)$$




Piense en casos de situaciones físicas representadas por una expresión como la dada.

¿Qué fenómeno físico cree que está involucrado?

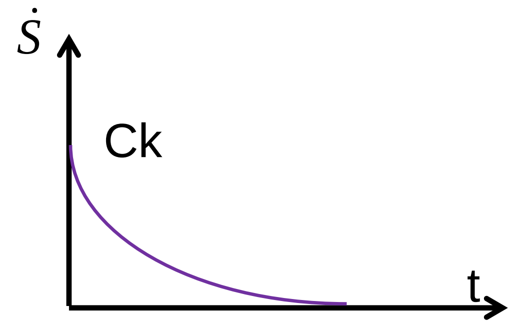
# Coordenadas Intrínsecas: ejemplo I

Partimos de la expresión para la posición:

$$S(t) = C\left(1 - e^{-kt}\right)$$

Evaluando la derivada respecto del tiempo obtenemos

$$\dot{S}(t) = Cke^{-kt}$$




Esto nos permite definir la velocidad de la partícula.

$$\vec{v}(t) = v_0\, e^{-kt}\,\hat{e}_t \qquad con \qquad v_0 = Ck$$

# Coordenadas Intrínsecas: ejemplo I

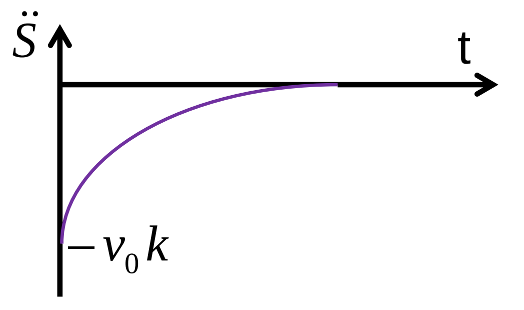
$$\boxed{S(t) = C\left(1 - e^{-kt}\right)}$$

Derivando ahora respecto al tiempo la expresión

$$\dot{S}(t) = Cke^{-kt}$$

de la velocidad, resulta

$$\ddot{S}(t) = -Ck^2 e^{-kt}$$




Lo cual nos permite definir la aceleración como:

$$\boxed{\vec{a}_t(t) = -a_0\, e^{-kt}\hat{e}_t} \qquad con \qquad a_0 = v_0 k$$

Es decir, tenemos que:

$$\boxed{\vec{a}_t(t) = -k\,\vec{v}(t)}$$

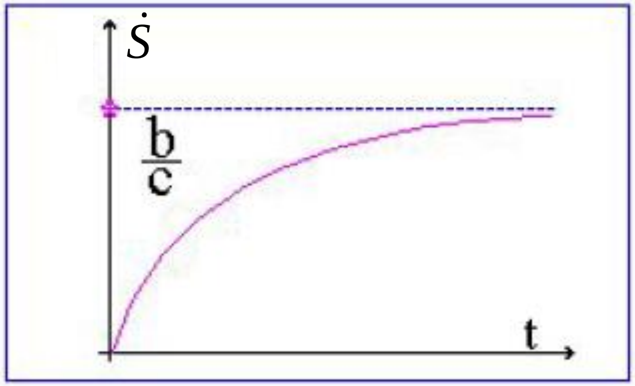
# Coordenadas Intrínsecas: ejemplo II

Supongamos que partimos ahora de una variante del caso anterior:

$$\ddot{S}(t) = b - c\dot{S}$$

Separando variables, tendremos

$$\frac{d\dot{S}}{b - c\dot{S}} = dt$$




Integrando, resulta:

$$\ln\left(\frac{b - c\dot{S}}{b}\right) = -ct$$

o bien

$$\dot{S} = \frac{b}{c}\left(1 - e^{-ct}\right)$$

Piense en casos de situaciones físicas representadas por una aceleración como la dada.

¿Qué fenómeno físico cree que está involucrado?

# Coordenadas Intrínsecas: ejemplo III

Supongamos ahora que tenemos la siguiente definición para la aceleración:

$$\ddot{S}(S) = \ddot{S}(S)$$

Podemos trabajar esta relación de la siguiente manera:

$$\frac{d\dot{S}}{dt} = \ddot{S}(S) \Rightarrow \boxed{\frac{d\dot{S}}{dS}\dot{S} = \ddot{S}(S)}$$

Podemos ahora integrar en ambos miembros:

$$\int_{\dot{S}_0}^{\dot{S}} \dot{S}\, d\dot{S} = \int_{S_0}^{S} \ddot{S}(S) dS$$

Lo cual nos da:

$$\boxed{\dot{S}^2 = \dot{S}_0^2 + 2\int_{S_0}^{S} \ddot{S}(S) dS}$$

# Coordenadas Intrínsecas: ejemplo III

Partiendo de la expresión anterior

$$\dot{S}(S) = [F(S)]^{\frac{1}{2}}$$

Podemos obtener una expresión para el tiempo en función de S a partir de:

$$\frac{dS}{dt} = [F(S)]^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{[F(S)]^{\frac{1}{2}}} = dt$$

Esta nos permite tener la siguiente relación:

$$\int_{S_0}^{S} \frac{dS}{[F(S)]^{\frac{1}{2}}} = t$$

La inversa de la función obtenida nos permite tener S como función del tiempo.

# Coordenadas Intrínsecas: ejemplo III

Supongamos que tenemos concretamente:

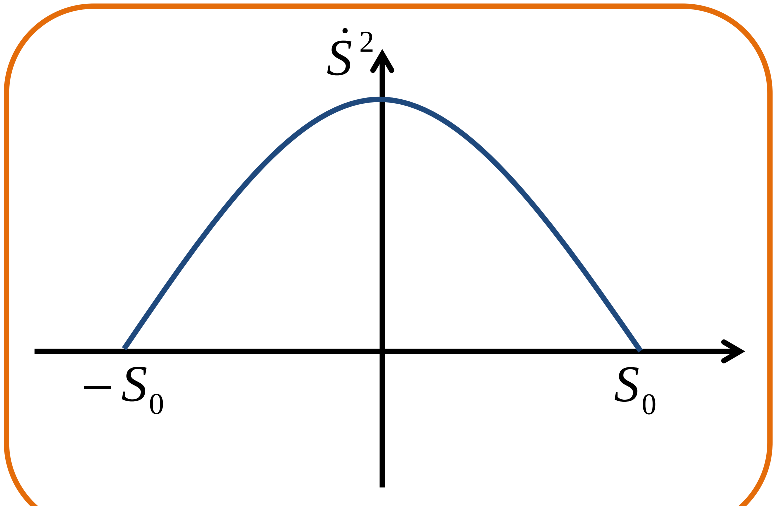
$$\boxed{\ddot{S}(S) = -kS} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{a}_t(t) = -k\,S\hat{e}_t}$$

Utilizando:

$$\dot{S}^2 = \dot{S}_0^2 + 2\int_{S_0}^{S} \ddot{S}(S)\,dS$$

Tendremos:

$$\boxed{\dot{S}^2 = k\left[S_0^2 - S^2\right]}$$




$$donde \qquad \dot{S}_0 = 0$$

Piense en casos de situaciones físicas representadas por una aceleración como la dada.

¿Qué fenómeno físico cree que está involucrado?

# Coordenadas Intrínsecas: ejemplo III

Estudiamos ahora de manera diferente la aceleración dada:

$$\boxed{\ddot{S}(S) = -kS} \longrightarrow \boxed{\vec{a}_t(t) = -k\,S\hat{e}_t}$$

Podemos ahora obtener una integral concreta para la relación coordenada-tiempo

$$\int_{S_0}^{S} \frac{dS}{\left[F(S)\right]^{\frac{1}{2}}} = t \longrightarrow \int_{S_0}^{S} \frac{dS}{\left[k\left(S_0^2 - S^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = t$$

La cual reescribimos como:

$$\int_{S_0}^{S} \frac{dS}{\left(S_0^2 - S^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \omega t \quad donde \quad \omega = \sqrt{k}$$

# Coordenadas Intrínsecas: ejemplo III

Haciendo la integral, resulta

$$\int_{S_0}^{S} \frac{dS}{\left(S_0^2 - S^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \omega t \qquad \Longrightarrow \qquad \arcsin\left(\frac{S}{S_0}\right)\Bigg|_{S_0}^{S} = \omega t$$

o bien

$$\arcsin\left(\frac{S}{S_0}\right) - \frac{\pi}{2} = \omega t$$

Tomando ahora la inversa resulta:

$$S(t) = S_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{S(t) = S_0 \cos(\omega t)}$$