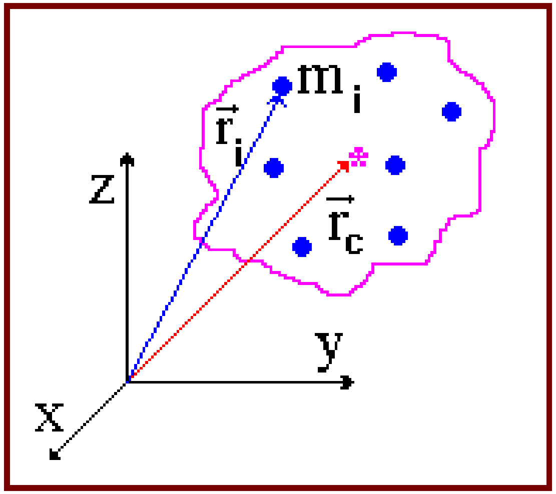
Sistema de partículas

Definiciones básicas



Centro de masas (CM)

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

Velocidad del CM

$$\vec{v}_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m}$$

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt}$$

Aceleración del CM

$$\vec{a}_c = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{m}$$

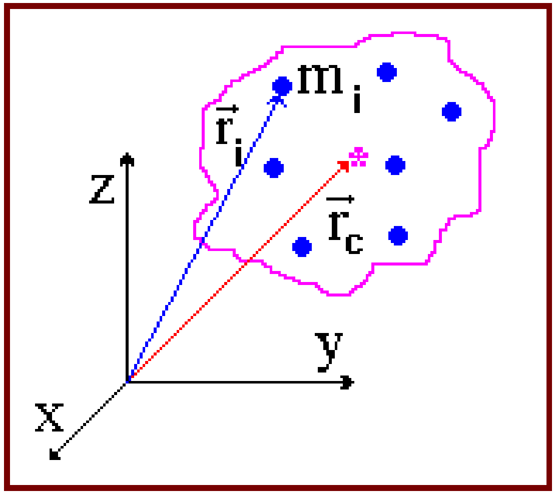
$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt}$$

Ecuación de movimientos para el CM

$$\vec{F} = m\vec{a}_c$$

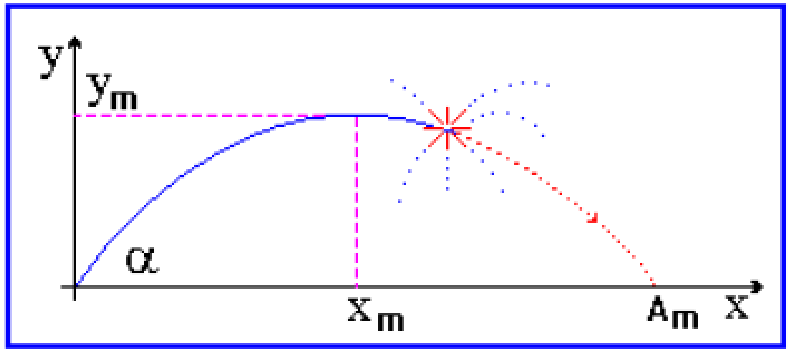
Sistema de partículas

Cantidad de movimiento



$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i \qquad \vec{P} = m\vec{v}_c$$

$$\vec{F} = m\vec{a}_c \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_{xyz}$$

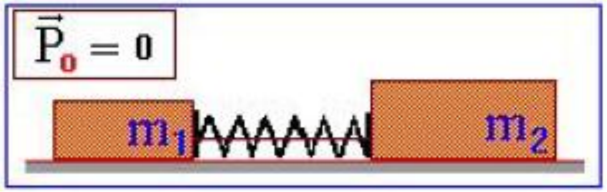


Teorema de conservación

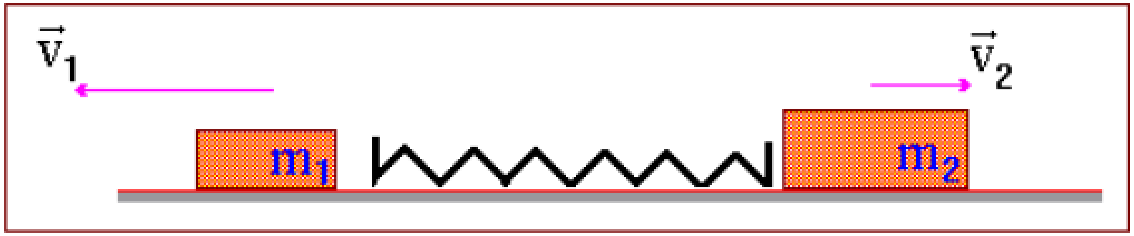
$$\boxed{\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{P} = cte \quad \therefore \quad \vec{P} = \vec{P}_\circ \quad \therefore \quad \sum m_i \vec{v}_i = \vec{P}_\circ}$$

Sistema de partículas

Ejemplo I



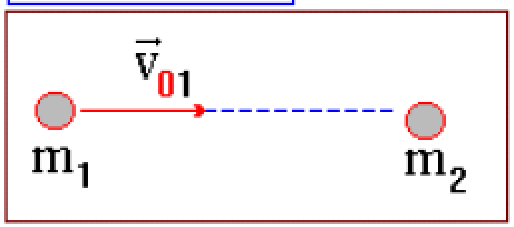
$$\vec{P}_f = \vec{P}_\circ \quad \therefore \quad m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0 \quad \therefore \quad \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_2$$

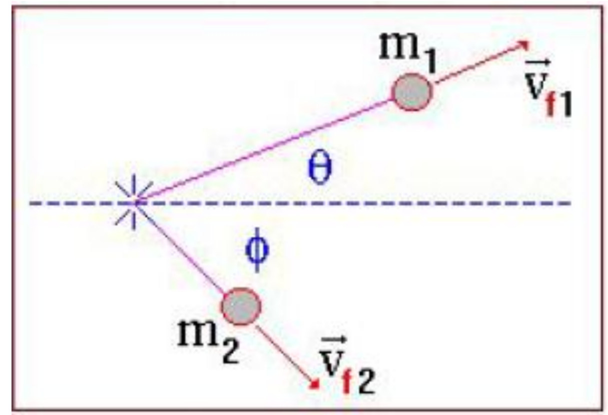


Sistema de partículas

Ejemplo II

$$\vec{P}_o = m_1 \vec{v}_{01}$$



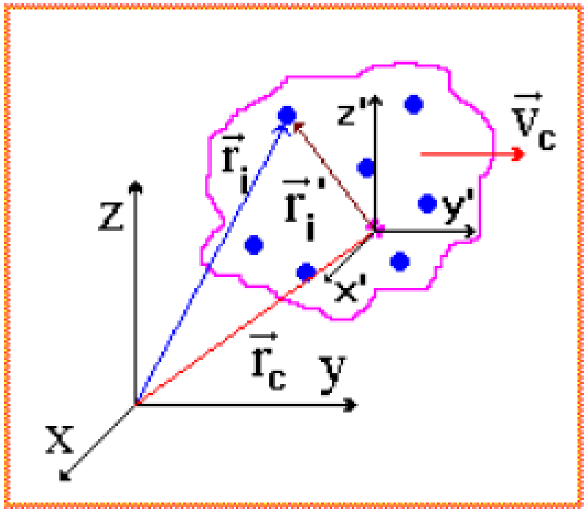


$$\vec{P}_f = m_1 \vec{v}_{f1} + m_2 \vec{v}_{f2}$$

$$m_1 \vec{v}_{01} = m_1 \vec{v}_{f1} + m_2 \vec{v}_{f2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} m_1 v_{01} &= m_1 v_{f1} \cos\theta + m_2 v_{f2} \cos\phi \\ 0 &= m_1 v_{f1} \operatorname{sen}\theta - m_2 v_{f2} \operatorname{sen}\phi \end{aligned} \right.$$

Sistema de partículas



Sistema de referencias centroidal

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i'$$
$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i'$$
$$\vec{a}_i = \vec{a}_c + \vec{a}_i'$$

$$\vec{P}' = \sum m_i \vec{v}_i \quad \therefore \quad \vec{P}' = \frac{d}{dt}\sum m_i \vec{r}_i'$$

La cantidad movimiento de un sistema de partículas determinada respecto de su sistema de referencia centroidal, es
Siempre nula

$$\vec{r}_c' = \frac{\sum m_i \vec{r}_i'}{m} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum m_i \vec{r}_i' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{P}' = 0$$

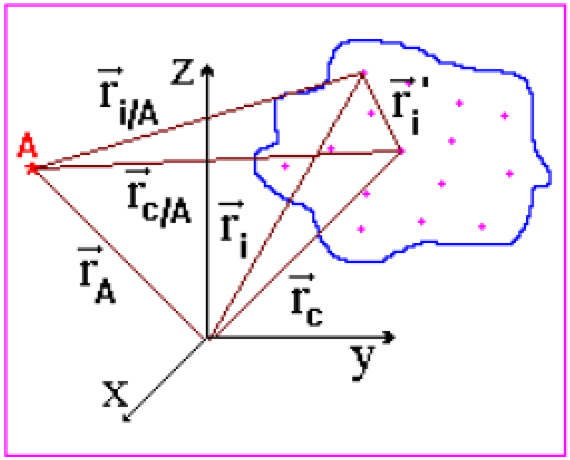
Sistema de partículas

Momento Angular

$$\boxed{\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i}$$

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i'$$
$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i'$$
$$\vec{a}_i = \vec{a}_c + \vec{a}_i'$$



Usando las relaciones

$$\vec{L} = \sum (\vec{r}_c + \vec{r}')_i \times m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_i')$$

Distribuyendo resulta

$$\vec{L} = \vec{r}_c \times \vec{v}_c \sum m_i + \vec{r}_c \times \sum m_i \vec{v}_i' - \vec{v}_c \times \sum m \vec{r}_i' + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

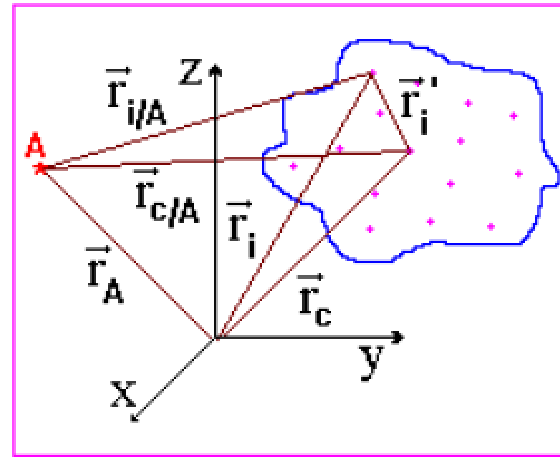
Sistema de partículas

Momento Angular

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i'$$
$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i'$$
$$\vec{a}_i = \vec{a}_c + \vec{a}_i'$$



Usando las relaciones

$$\vec{L} = \sum (\vec{r}_c + \vec{r}')_i \times m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_i')$$

Distribuyendo resulta

$$\vec{L} = \vec{r}_c \times \vec{v}_c \sum m_i + \vec{r}_c \times \underbrace{\sum m_i \vec{v}_i'}_{=0} - \vec{v}_c \times \underbrace{\boxed{\sum m \vec{r}_i'}}_{=0} + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

Usando las relaciones

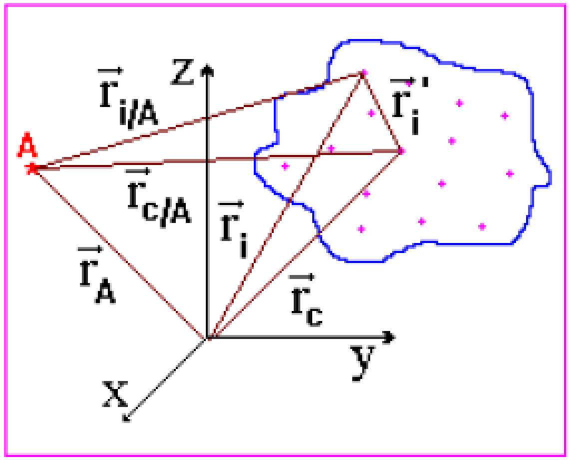
$$\begin{cases} \sum m_i \vec{r}_i' = 0 \\ \vec{P}' = 0 \end{cases}$$

$$\vec{L} = \vec{r}_c \times m \vec{v}_c + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

Sistema de partículas

Momento Angular

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$



Finalmente podemos escribir la siguiente expresión para el momento angular

$$\vec{L} = \vec{r}_c \times m\vec{v}_c + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

El primero de los términos define el

Momento Angular Orbital

$$\vec{L}_{or} = \vec{r}_c \times m\vec{v}_c$$

Y por otro lado, el segundo termino define el

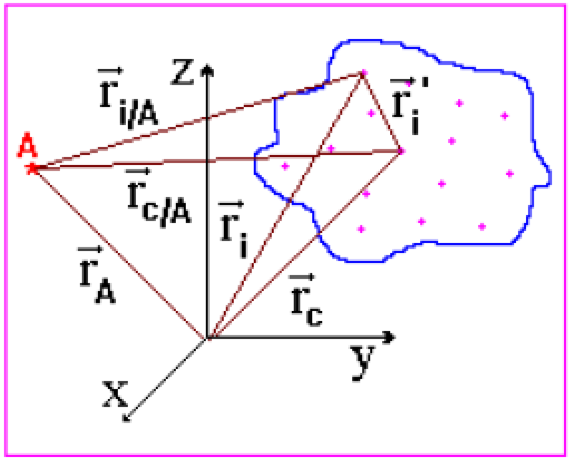
Momento Angular Intrínseco

$$\vec{L}_c = \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

Sistema de partículas

Momento Angular

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$



Finalmente podemos escribir la siguiente expresión para el momento angular

$$\vec{L} = \vec{r}_c \times m\vec{v}_c + \sum \vec{r}_i\,' \times m_i \vec{v}_i\,'$$

El primero de los términos define el

Momento Angular Orbital

$$\vec{L}_{or} = \vec{r}_c \times m\vec{v}_c$$

Y por otro lado, el segundo termino define el

Momento Angular Intrínseco

$$\vec{L}_c = \sum \vec{r}_i\,' \times m_i \vec{v}_i\,'$$

$$\vec{L}_A = \sum \vec{r}_{i/A} \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{L}_A = \vec{r}_{c/A} \times m\vec{v}_c + \sum \vec{r}_i\,' \times m_i \vec{v}_i\,'$$

Sistema de partículas

Ecuación de Momentos

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{xyz} = \sum \left.\dot{\vec{r}}_i\right|_{xyz} \times m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i \times m_i \left.\dot{\vec{v}}_i\right|_{xyz}$$

$$m_i \left.\dot{\vec{v}}_i\right|_{xyz} = \vec{F}_i + \vec{f}_i \qquad \vec{f}_i = \sum_j \vec{f}_{ij}$$

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{xyz} = \underbrace{\sum \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i}_{=0} + \sum \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij})$$

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{xyz} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{r}_i \times \sum_j \vec{f}_{ij}$$

Sistema de partículas

Ecuación de Momentos

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{xyz} = \sum \left.\dot{\vec{r}}_i\right|_{xyz} \times m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i \times m_i \left.\dot{\vec{v}}_i\right|_{xyz}$$

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{xyz} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{r}_i \times \sum_j \vec{f}_{ij}$$

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{xyz} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{xyz} = \sum \vec{M}_i$$

$$\boxed{\vec{M} = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{xyz}}$$

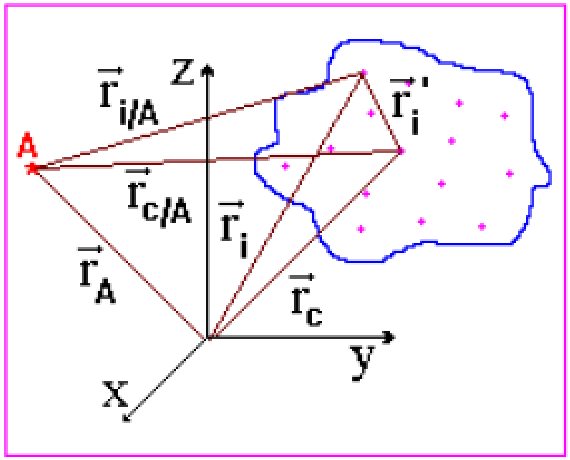
$$\sum \vec{r}_i \times \sum \vec{f}_{ij} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{f}_{12} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times \vec{f}_{13} + \ldots\ldots = 0$$

$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ es paralelo a $\vec{f}_{12}$

Sistema de partículas

Ecuación de Momentos

En términos generales se pueden escribir las siguientes ecuaciones



$$\vec{M}_A = \left.\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right|_{xyz} + \vec{v}_{A/xyz} \times m\vec{v}_{c/xyz}$$

$$\vec{M}_C = \left.\frac{d\vec{L}_C}{dt}\right|_{xyz}$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_C + \vec{r}_{C/A} \times m\vec{a}_C$$
$$\vec{M}_A = \vec{M}_C + \vec{r}_{C/A} \times \vec{F}$$

Sistema de partículas

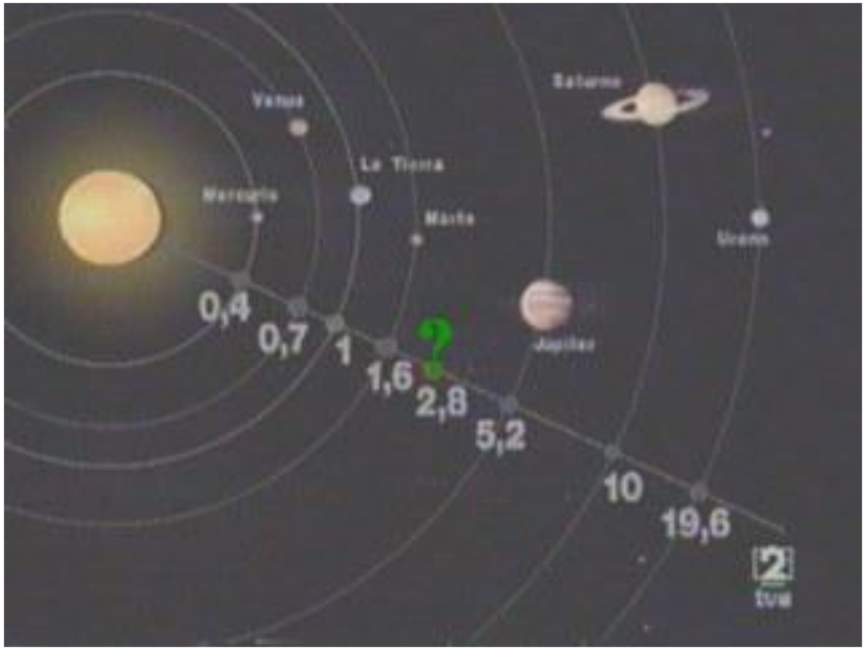
Conservación del Momento Angular

$$\boxed{\vec{M} = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{xyz}}$$

Si $\vec{M} = 0$ entonces $\vec{L} = \vec{L}_o$

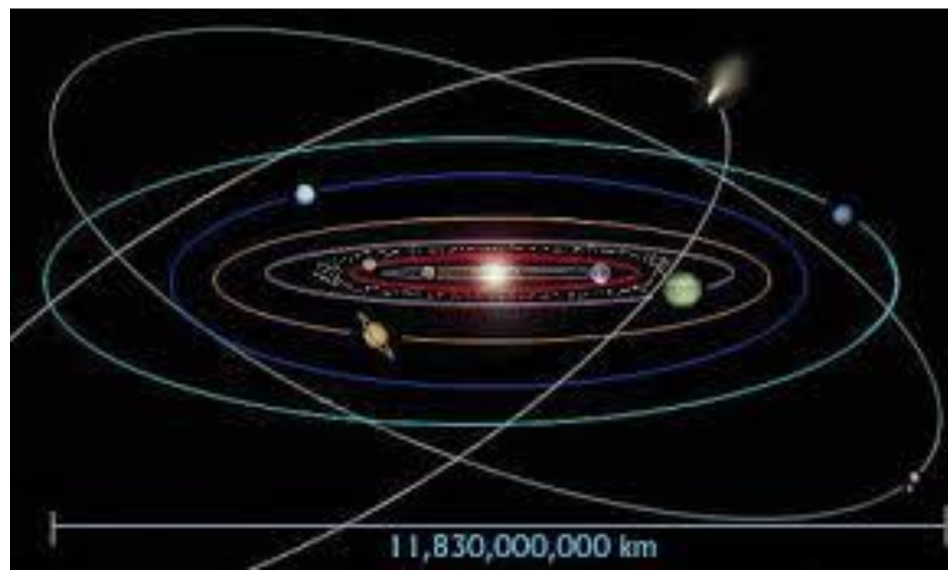
Si $\vec{M}_c = 0$ entonces $\vec{L}_c = \vec{L}_{co}$

Sistema de partículas



¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del sistema de partículas compuesto por todos los planetas del sistema solar?

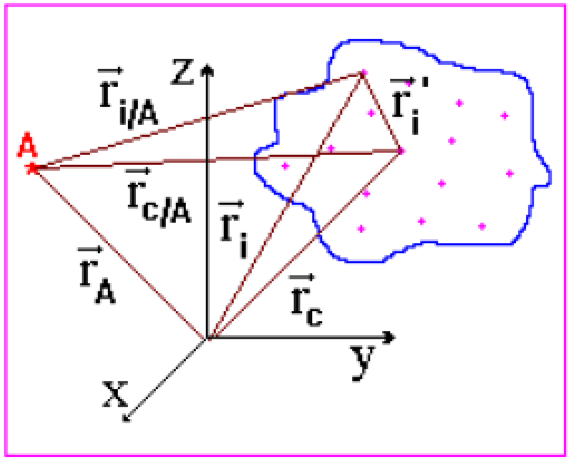
Haga el cálculo y muestre la importancia de cada uno de los planetas.



Sistema de partículas

Energía Cinética

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$



$$T = \sum \frac{1}{2} m_i (v_c^2 + v_i'^2 + 2\vec{v}_c \cdot \vec{v}_i')$$

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \vec{v}_c \cdot \sum m_i \vec{v}_i'$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2}$$

$$T_{or} = \frac{1}{2} m v_c^2$$

Energía cinética orbital

$$T' = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Energía cinética intrínseca

Sistema de partículas

Energía Cinética

Una forma alternativa de definir la energía cinética para las dos partículas es:

$$\boxed{T = \frac{p^2}{2m} + \sum \frac{p_i'^2}{2m_i}}$$

Usando las relaciones

$$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0$$

$$\vec{p}_1' = -\vec{p}_2' = \vec{p}\,'$$

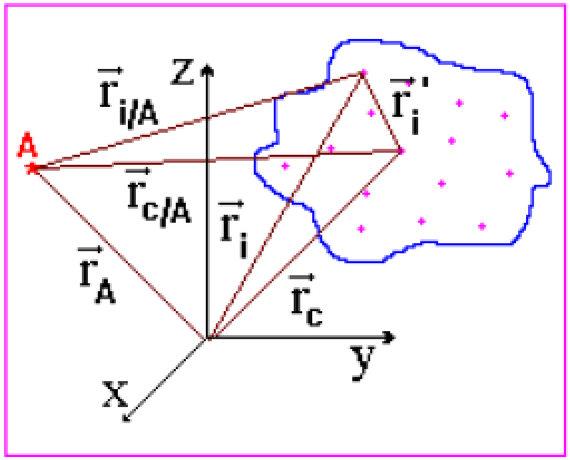
obtenemos

$$\boxed{T = \frac{p^2}{2m} + \frac{p'^2}{2\mu}}$$

donde

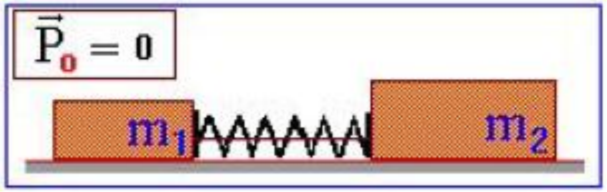
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Define lo que se conoce como **masa reducida**

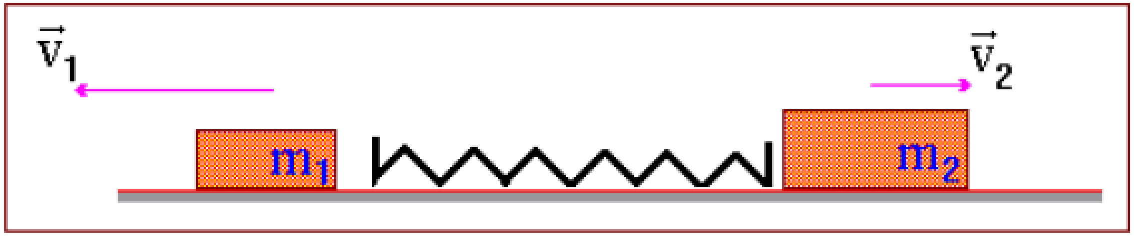


Sistema de partículas

Ejemplo I



$$\vec{P}_f = \vec{P}_\circ \quad \therefore \quad m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0 \quad \therefore \quad \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_2$$



$$\left.\begin{array}{l} E = E_\circ \\ \\ E_\circ = \dfrac{1}{2}k\delta_\circ^2 \end{array}\right\} \quad \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}k\delta_\circ^2 \quad \left\{\begin{array}{l} v_1^2 = \dfrac{k\delta_\circ^2}{m_1 + m_2} \\ \\ v_2^2 = \dfrac{m_1}{m_2}\dfrac{k\delta_\circ^2}{m_1 + m_2} \end{array}\right.$$