Cantidad de Movimiento

Definimos la cantidad de movimiento **p** como:

$$\boxed{\vec{p}_{XYZ} = m\vec{v}_{XYZ}}$$

Puede, inmediatamente, verse la relación del impulso con las fuerza :

$$\vec{F} = \frac{d\,\vec{p}_{XYZ}}{dt}$$

Cantidad de Movimiento

Partiendo de la relación entre las fuerzas y la cantidad de movimiento obtenemos:

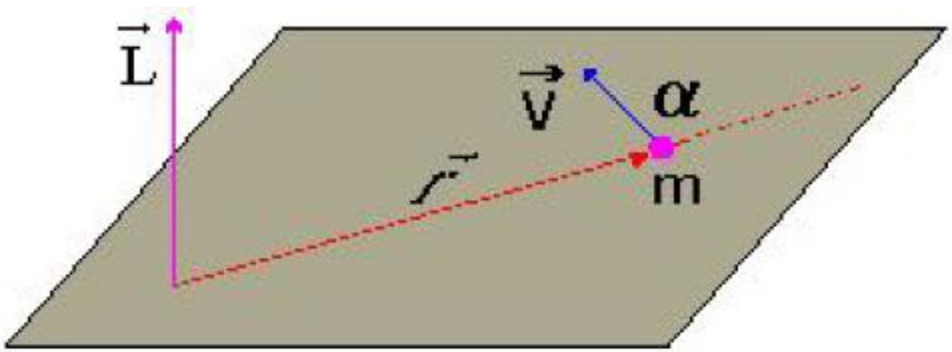
$$\vec{F}\,dt = \frac{d\vec{p}}{dt}\,dt = d\vec{p} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}\,\Delta t = \Delta\vec{p}$$

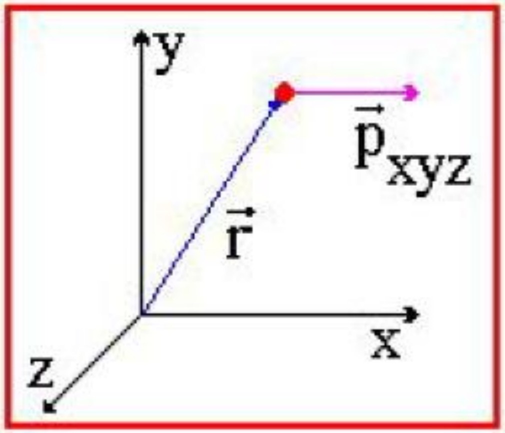
Definimos el ***Impulso*** como la fuerza que actúa en un cierto intervalo de tiempo multiplicada por la duración del intervalo, de manera que:

$$\boxed{I = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt = \int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} d\vec{p} = \Delta\vec{p}}$$

Momento Angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}_{XYZ}$$





$$L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

$$L = rmv \,\mathrm{sen}\, \alpha$$

$$\boxed{L = m r^2 \dot{\theta}} \xrightarrow{I = m r^2} \boxed{L = I \dot{\theta}}$$

Ecuación de Momentos

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}_{XYZ}$$

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right]_{xyz} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_{xyz} \times \vec{p} + \vec{r} \times \left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right]_{xyz}$$

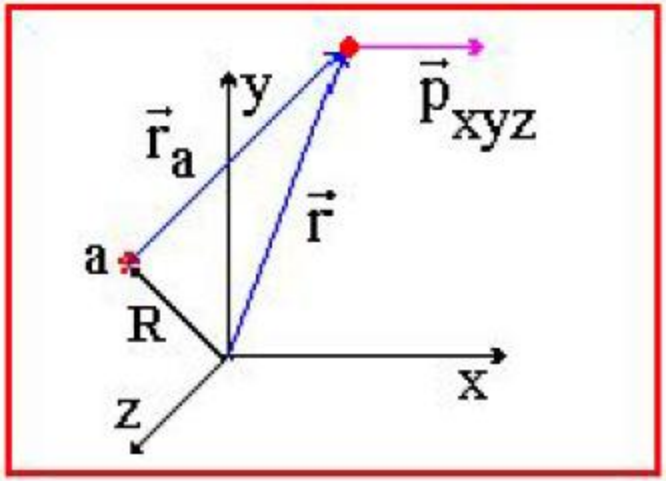
$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right]_{xyz} = \vec{r} \times \left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right]_{xyz} \Rightarrow \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right]_{xyz} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \boxed{\vec{M} = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right]_{XYZ}}$$

Ecuación de Momentos

Ecuación de Momentos

$$\vec{L}_a = \vec{r}_a \times \vec{p}_{xyz}$$



$$\vec{r}_a = \vec{r} - \vec{R}$$

$$\left.\frac{d\vec{L}_a}{dt}\right]_{xyz} = \left.\frac{d\vec{r}_a}{dt}\right]_{xyz} \times \vec{p}_{xyz} + \vec{r}_a \times \vec{F}$$

$$\left.\frac{d\vec{L}_a}{dt}\right]_{xyz} = (\vec{v}_{xyz} - \vec{v}_{A/xyz}) \times \vec{p}_{xyz} + \vec{r}_a \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_a = \left.\frac{d\vec{L}_a}{dt}\right]_{xyz} + \vec{v}_{a/xyz} \times \vec{p}_{xyz} \Rightarrow$$

Si el punto a es un punto fijo al sistema

$$\Rightarrow \vec{M}_a = \left.\frac{d\vec{L}_a}{dt}\right]_{xyz}$$

Teoremas de conservación

Conservación de la cantidad de movimiento

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Si la fuerza **F** es nula

$$\vec{F} = \frac{d\,\vec{p}_{XYZ}}{dt} = 0$$

La cantidad e movimiento **p** es constante

Teoremas de conservación

Conservación de la cantidad de movimiento angular

$$\vec{M}_a = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_a = cte \quad \therefore \quad \vec{L} = \vec{L}_{oa}$$

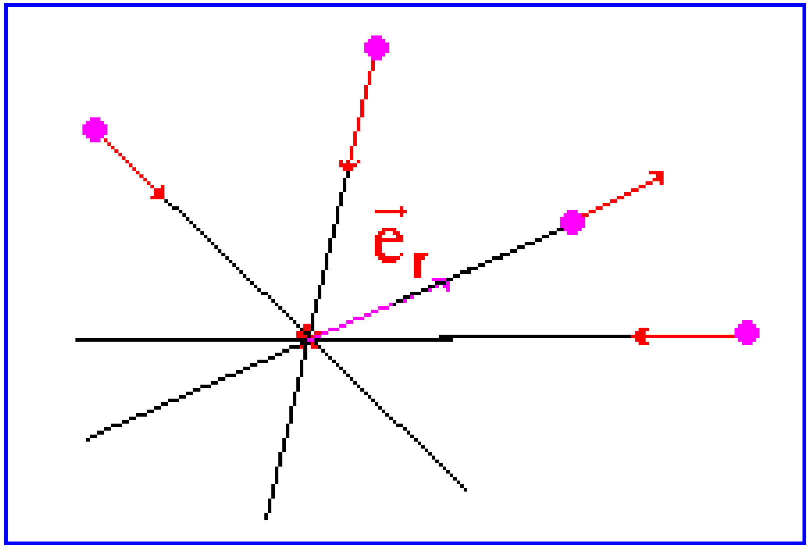
$$m\, r_a^2\, \dot{\theta} = cte \qquad\qquad m\, r_a^2\, \dot{\theta} = L_{oa}$$

$$\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = cte \quad \therefore \quad \vec{L} = \vec{L}_o$$

$$m\, r^2\, \dot{\theta} = L_o \qquad\qquad \dot{\theta} = \frac{L_o}{m\, r^2}$$

Fuerza radial y esféricamente simétrica

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{e}_r$$

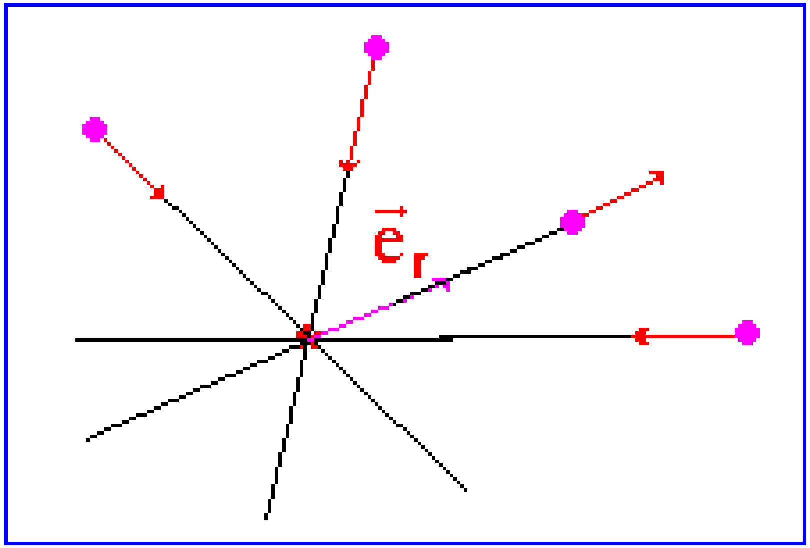


La recta de acción esta siempre a lo largo de la línea que une el punto con el centro de fuerzas.

El módulo de la fuerza depende sólo de la distancia entre el punto y el centro de fuerzas: f(r).

Fuerza radial y esféricamente simétrica

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{e}_r$$



$$f(r) = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)$$

$$m\,r^2\,\dot{\theta} = L_\circ$$

$$\ddot{r} = \left(\frac{L_\circ}{m}\right)^2 \frac{1}{r^3} + \frac{f(r)}{m}$$

$$\dot{r}d\dot{r} = \left(\frac{L_\circ}{m}\right)^2 \frac{1}{r^3}dr + \frac{f(r)}{m}dr$$

Fuerza radial y esféricamente simétrica

$$\ddot{r} = \left(\frac{L_o}{m}\right)^2 \frac{1}{r^3} + \frac{f(r)}{m} \quad \Longrightarrow \quad \dot{r}\,d\dot{r} = \left(\frac{L_o}{m}\right)^2 \frac{1}{r^3}\,dr + \frac{f(r)}{m}\,dr$$

$$\dot{r}^2 = \dot{r}_o^2 + \left(\boxed{\frac{L_o}{m}}\right)^2 \left(\frac{1}{r_o^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2}{m}\int_{r_o}^{r} f(r)\,dr$$

$$\dot{r}^2 = \dot{r}_o^2 + l_o^2 \left(\frac{1}{r_o^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2}{m}\int_{r_o}^{r} f(r)\,dr$$

Fuerza radial y esféricamente simétrica

Tiro vertical de LARGO alcance

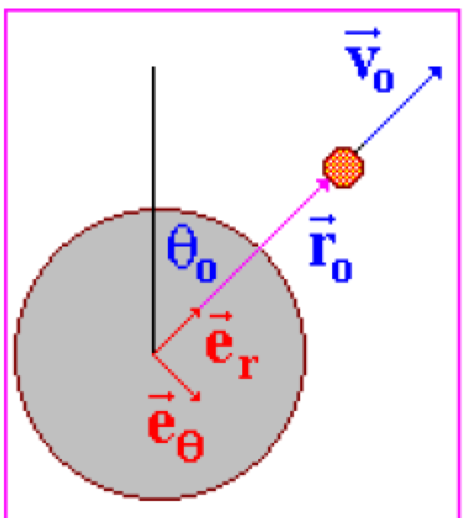
$$\vec{F} = -G\,\frac{mM}{r^2}\,\vec{e}_r$$

$$\dot{\theta} = \frac{L_\circ}{m\,r^2}$$

$$\dot{\theta} = 0 \qquad \therefore \qquad \theta = \theta_\circ$$

$$\dot{r}^2 = \dot{r}_\circ^2 - 2GM\left(\frac{1}{r_\circ} - \frac{1}{r}\right)$$

$$v^2 = v_\circ^2 - 2GM\left(\frac{1}{r_\circ} - \frac{1}{r}\right)$$



$$r_m = \frac{2GMr_\circ}{2GM - r_\circ v_\circ^2}$$

$$v_{\circ(\text{escape})} = \sqrt{\frac{2GM}{r_\circ}}$$

11 km/s (39.600 km/h)

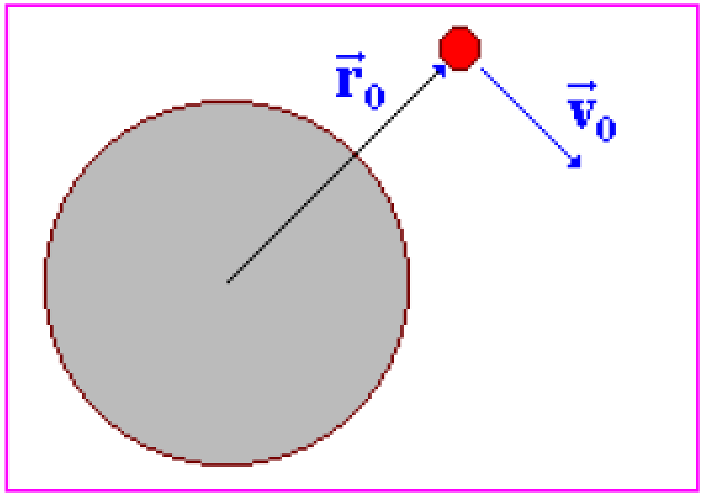
Fuerza radial y esféricamente simétrica

Tiro horizontal de LARGO alcance

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\dot{\theta} = \frac{L_\circ}{m\,r^2}$$

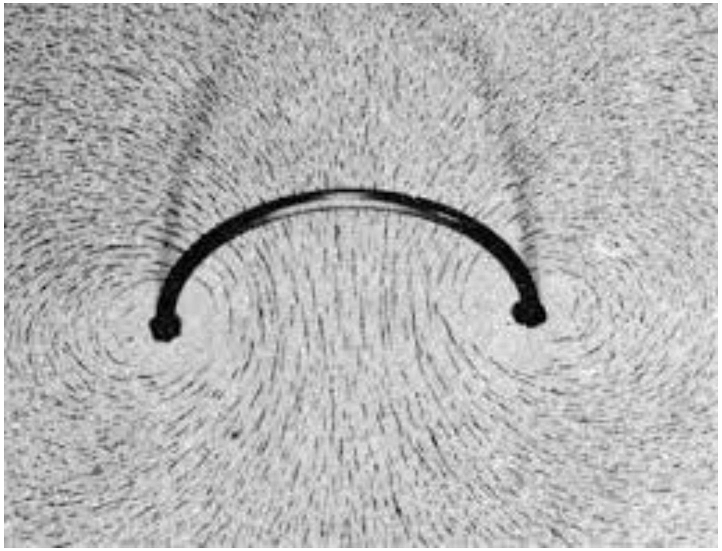
$$\dot{\theta} = \frac{r_\circ v_\circ}{r^2}$$

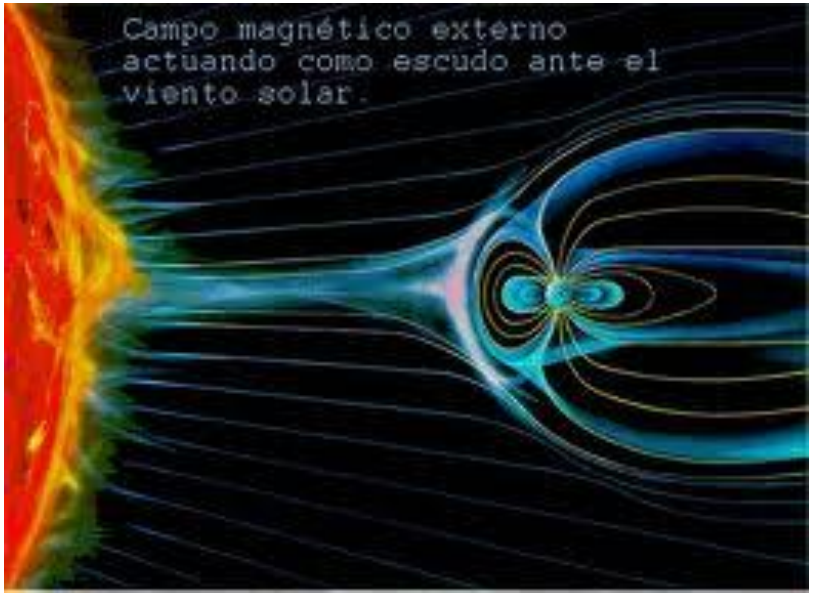


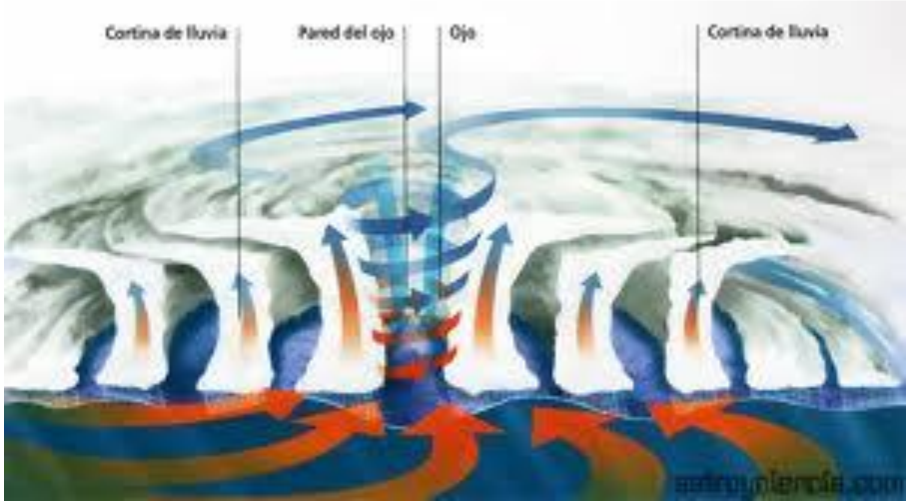
$$\dot{r}^2 = (r_\circ v_\circ)^2\left(\frac{1}{r_\circ^2} - \frac{1}{r^2}\right) - 2GM\left(\frac{1}{r_\circ} - \frac{1}{r}\right)$$

$$v_{\circ(\text{escape})} = \sqrt{\frac{2GM}{r_\circ}}$$

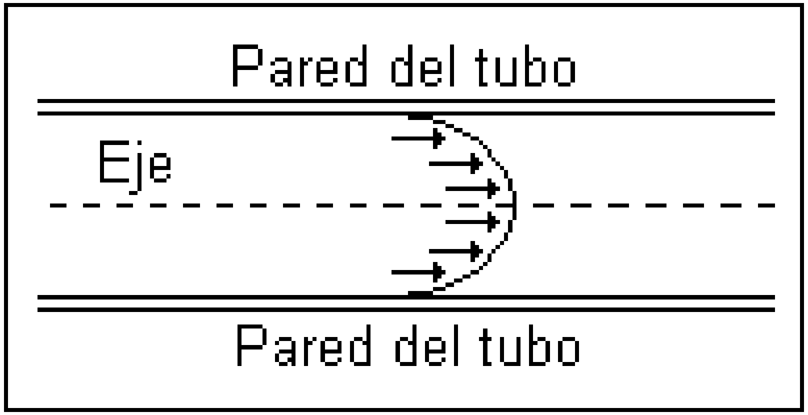
Campos Vectoriales







Campos Vectoriales



$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ Campo no estacionario

$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ Campo estacionario (no depende del tiempo)

Campos Vectoriales

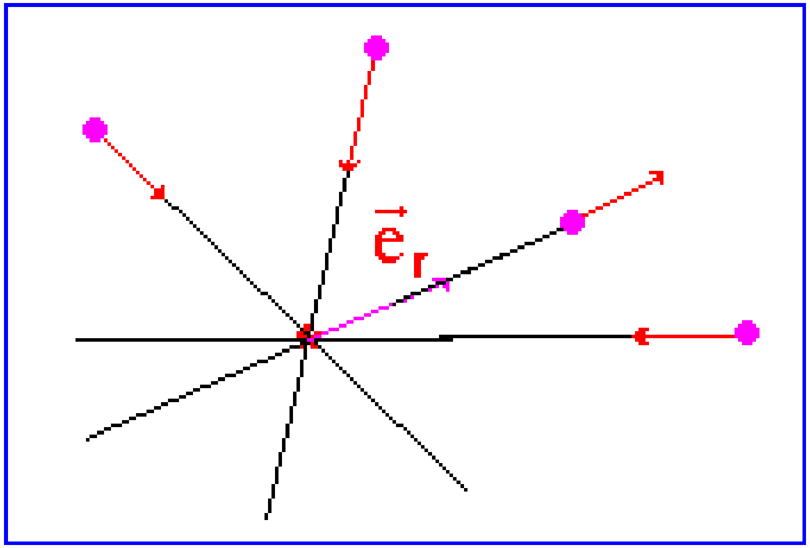
Un campo de fuerzas constante está dado por

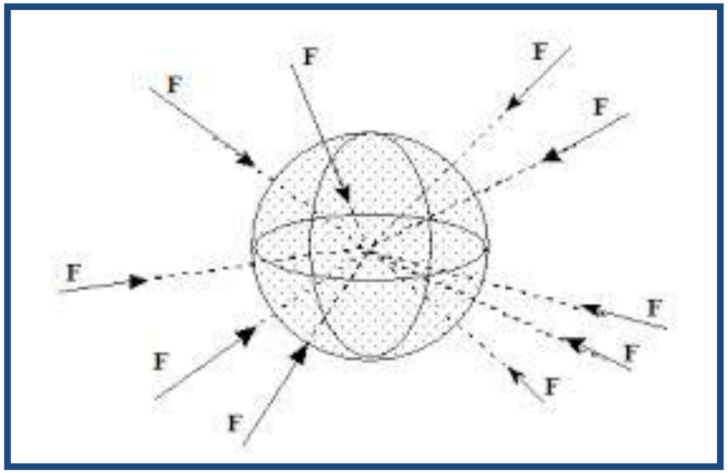
$$\vec{F} = \vec{K} = k_X \hat{i} + k_Y \hat{j} + k_Z \hat{k}$$

En particular, sobre la superficie de la Tierra la gravedad genera un campo de fuerzas constante

$$\vec{F}_g = -g \ \hat{j}$$

Campo radial y esféricamente simétrico





$$\vec{F} = f(r)\hat{e}_r$$

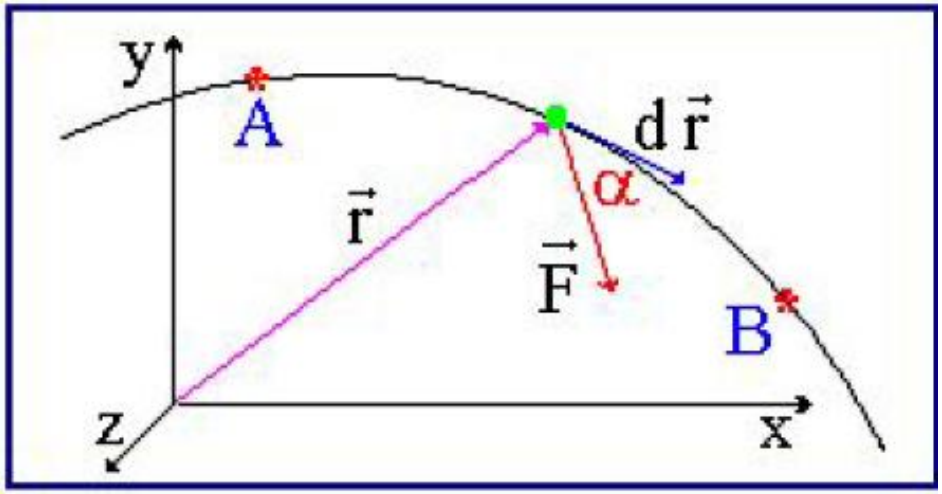
La recta de acción esta siempre a lo largo de la línea que une el punto con el centro de fuerzas.

El módulo de la fuerza depende sólo de la distancia entre el punto y el centro de fuerzas: f(r).

Trabajo Mecánico

Definimos el trabajo mecánico como:

$$\boxed{W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$



donde $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ es la fuerza aplicada.

Escribiendo la fuerza en coordenadas intrínsecas, tenemos

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F\cos\alpha)\vec{e}_t + (F\,\mathrm{sen}\,\alpha)\vec{e}_n$$

Por otro lado, el diferencial de desplazamiento se puede reescribir de la siguiente manera:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt \Longrightarrow d\vec{r} = \dot{s}\vec{e}_t dt \Longrightarrow d\vec{r} = ds\vec{e}_t$$

Con lo cual el trabajo infinitesimal, el producto escalar en el integrando de la definición de trabajo es:

$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = (F\cos\alpha)ds \Longrightarrow \boxed{W_{AB} = \int_A^B F\cos(\alpha)ds}$$

Trabajo Mecánico y Energía Cinética

Pero…..**¿qué es el trabajo?**

Podríamos decir que es algo así como:

la energía que hace falta para desplazar a un cuerpo una dada distancia.

Bien, pero…. **¿qué es la energía??**

Pues, no tenemos una definición, tenemos infinidad de ejemplos que muestran que eso que llamamos **energía** se conserva o se transforma!

Trabajo Mecánico y Energía Cinética

Comenzamos con la definición de trabajo:

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

Utilizamos ahora la segunda ley de Newton:

$$W = \int_A^B m\vec{a}_{xyz} \cdot d\vec{r}$$

Y hacemos explicita la definición de la aceleración

$$W = \int_A^B m\frac{d\vec{v}_{xyz}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

Reescribimos ahora la expresión anterior como sigue:

$$W = \int_{v_A}^{v_B} m\vec{v}_{xyz} \cdot d\vec{v}_{xyz}$$

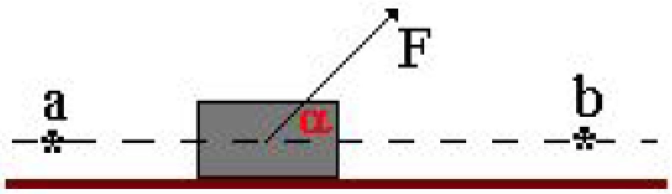
O, equivalentemente

$$W = \frac{1}{2}m\int_{v_A}^{v_B} dv_{xyz}^2$$

Integrando resulta:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}mv_{B/xyz}^2 - \frac{1}{2}mv_{A/xyz}^2}$$

Trabajo Mecánico



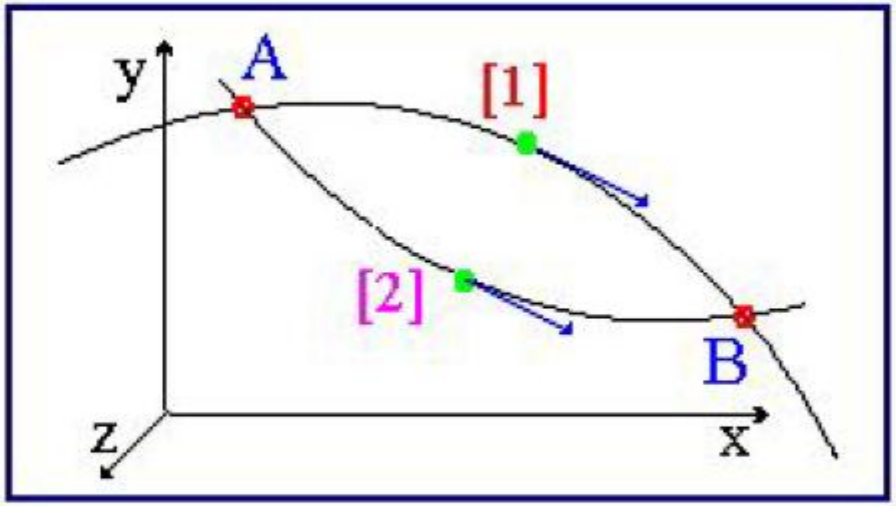
$$W_{ab} = F\cos\alpha\int_a^b ds$$

$$W_{ab} = FD\cos\alpha$$

Unidades
Joules

se define como el trabajo realizado por una fuerza de un Newton en un desplazamiento de un metro en la dirección de la fuerza.

Trabajo Mecánico

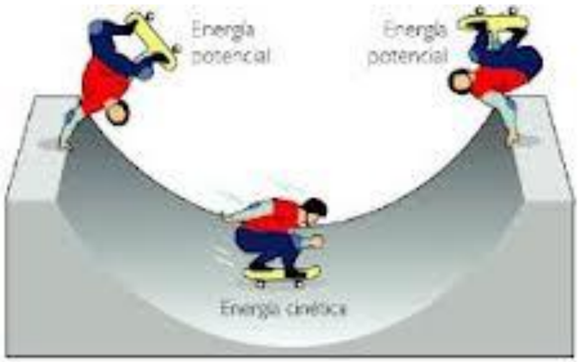


$$\int_A^B F\cos\alpha\, ds_1 \neq \int_A^B F\cos\alpha\, ds_2$$

Trabajo Mecánico y Energía Cinética

La expresión:

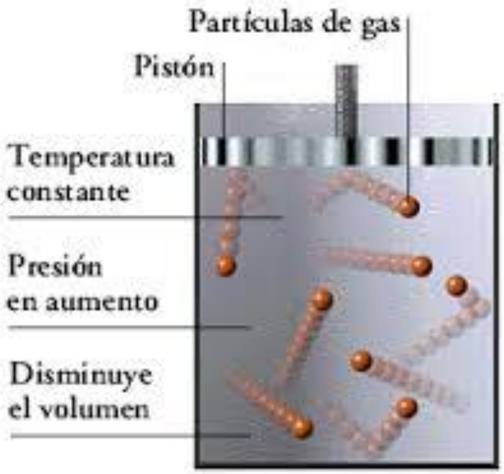
$$W = \frac{1}{2} m v_{B/xyz}^2 - \frac{1}{2} m v_{A/xyz}^2$$



Se puede simplificar si definimos a T como la Energía Cinética de la partícula

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v^2}$$

Energía Cinética



En términos de esta definición, el Trabajo Mecánico se puede definir como sigue:

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = T_B - T_A}$$

Teorema de las fuerzas vivas