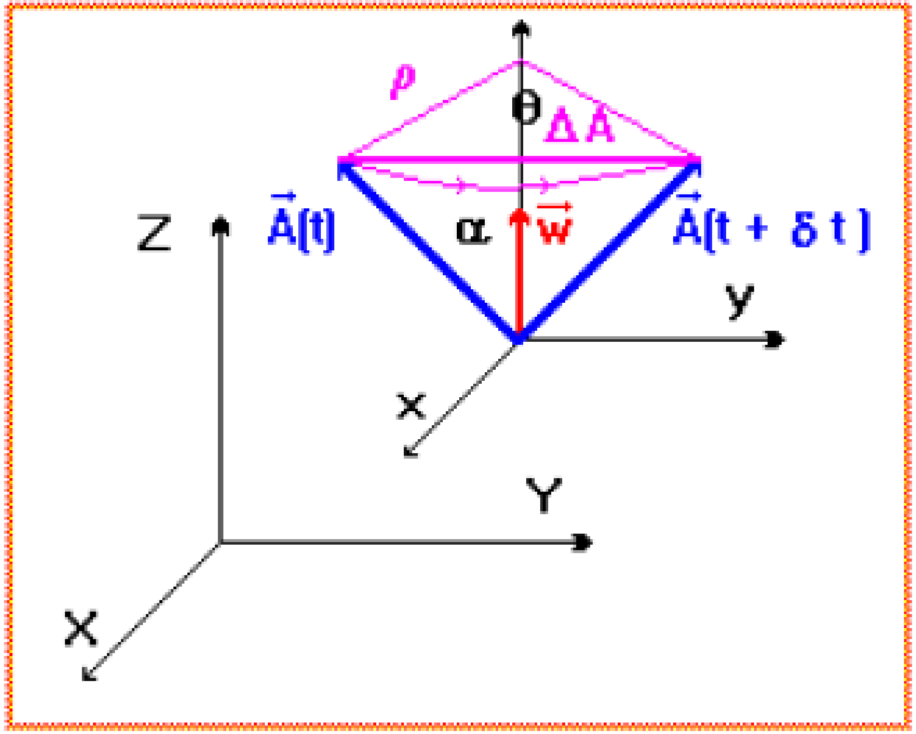
Sistemas de referencia acelerados



Supongamos que tenemos un sistema de referencia que esta rotando con una velocidad angular **w**. Y supongamos que observamos un vector A cuyas componentes varían en el tiempo respecto de dicho sistema.

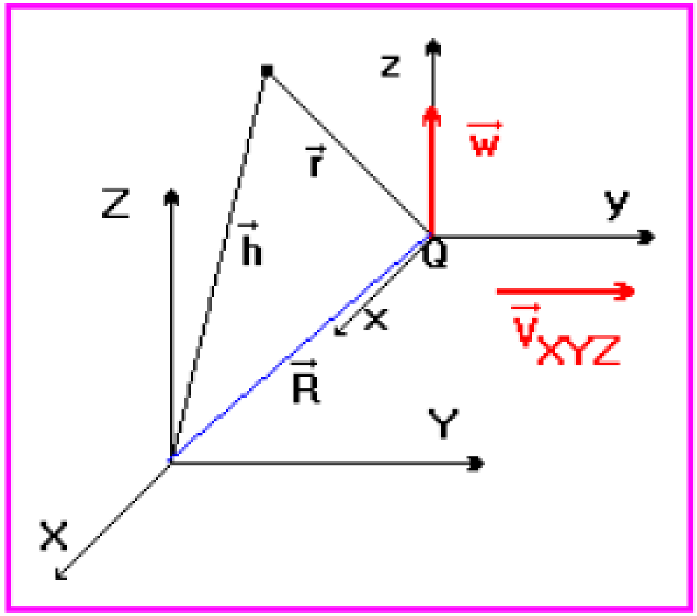
La velocidad de una partícula vista desde el sistema principal XYZ, estará dada por:

$$\dot{\vec{A}}\Big|_{XYZ} = \dot{\vec{A}}\Big|_{xyz} + \vec{w} \times \vec{A}$$

El primer termino a la derecha corresponde a la velocidad del punto observado respecto del sistema en rotación. El segundo termino esta asociado pura y exclusivamente al hecho de que el sistema esta rotando.

La suma representa la velocidad del punto visto desde el sistema principal.

Sistemas de referencia acelerados



Consideremos el movimiento de una partícula de masa m vista desde el sistema principal y expresada en términos de las magnitudes medidas también respecto del sistema en movimiento (en rotación) .
La posición de la partícula es:

$$\vec{h} = \vec{R} + \vec{r}$$

La velocidad de la misma será:

$$\vec{v}_{XYZ} = \vec{v}_{xyz} + \vec{V}_{XYZ} + \vec{w} \times \vec{r}$$

Derivando respecto del tiempo, obtenemos la aceleración:

$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{a}_{xyz} + \vec{A}_{XYZ} + \vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r} + 2\vec{w} \times \vec{v}_{xyz} + \dot{\vec{w}} \times \vec{r}$$

Ecuación de movimiento para un observador no inercial

La segunda ley de Newton aplicada a una partícula vista desde el sistema principal (XYZ) resulta ser:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_{XYZ}}$$

Vinculando esta con las magnitudes vistas desde el sistema en movimiento (xyz) resulta:

$$\vec{F} = m\vec{a}_{xyz} + m\vec{A}_{XYZ} + m\vec{w}\times\vec{w}\times\vec{r} + 2m\vec{w}\times\vec{v}_{xyz} + m\dot{\vec{w}}\times\vec{r}$$

La cual puede expresarse como

$$\boxed{\vec{F} + (-m\vec{A}_{XYZ}) + (-m\vec{w}\times\vec{w}\times\vec{r}) + (-2m\vec{w}\times\vec{v}_{xyz}) + (-m\dot{\vec{w}}\times\vec{r}) = m\vec{a}_{xyz}}$$

Ecuación de movimiento para un observador no inercial

Introduciendo las siguientes "Fuerzas no-inerciales"

De Traslación	Centrífuga	De Coriolis	De Euler
$f_t = -m\vec{A}_{XYZ}$	$f_{cf} = -m\vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r}$	$f_c = -2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}$	$f_e = -m\dot{\vec{w}} \times \vec{r}$

resulta

$$\boxed{\vec{F} + \vec{f}_t + \vec{f}_{cf} + \vec{f}_c + \vec{f}_e = m\vec{a}_{xyz}}$$

La cual corresponde a la **ecuación de movimiento para un observador no inercial**
Si definimos la resultante de las fuerzas inerciales como:

$$\vec{f} = \vec{f}_t + \vec{f}_{cf} + \vec{f}_c + \vec{f}_e$$

En forma compacta la ecuacion de movimientos resulta:

$$\vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}_{xyz}$$

La Tierra como un sistema no inercial

Suponiendo que consideramos al **Sol** como **sistema de referencia inercial**, a la **Tierra** como **sistema no inercial**, la ecuación de Newton para una partícula resulta ser

$$\vec{F} = m\vec{a}_{xyz} + m\vec{A}_{XYZ} + m\vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r} + 2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz} + m\dot{\vec{w}} \times \vec{r}$$

$\vec{A}_{XYZ}$	aceleración del centro de la Tierra respecto al Sol (movimiento orbital).

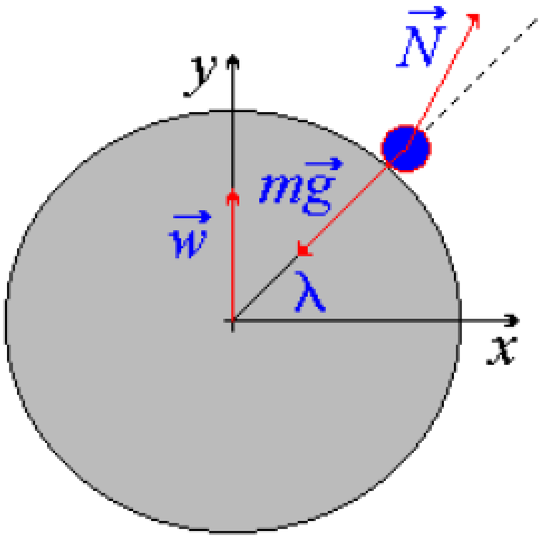
$\dot{\vec{w}}$	Aceleración angular de la Tierra respecto del Sol. Esta es pequeña, pero no nula. 1) El eje de rotación de la Tierra no coincide con el eje geográfico. 2) Las mareas producen pequeños cambios.

Si despreciamos los términos asociados al movimiento de la Tierra respecto del Sol tendremos

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_{xyz} + m\vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r} + 2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}}$$

La Tierra como un sistema no inercial

Variación del peso con la Latitud



Teniendo en cuenta que el cuerpo esta en reposo respecto del sistema de referencia fijo a Tierra, resulta

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r}$$

O, equivalentemente

$$\vec{N} = -m\vec{g} + m\vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r}$$

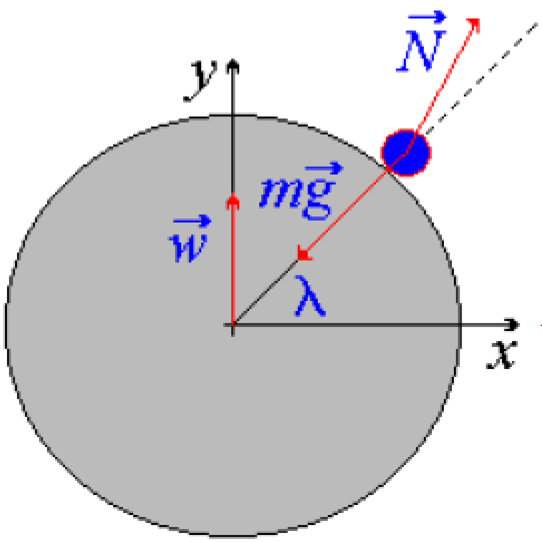
Evaluando las componentes de los vectores que aparecen a la derecha de la ecuación a lo largo de las direcciones definidas en el gráfico, resulta:

$$\vec{N} = mg\left[\cos(\lambda)\,\vec{i} + \operatorname{sen}(\lambda)\,\vec{j}\right] - m\underbrace{w^2 R}_{\boxed{0.03395}}\cos(\lambda)\,\vec{i}$$

v=wR=1,674.4 km/h (465.1 m/s) (ecuatorial)
R=6371.0 km =6371000 m (radio medio)
w=0.0000729 rad/s

La Tierra como un sistema no inercial

Variación del peso con la Latitud



Agrupando términos resulta:

$$\vec{N} = mg\left(1 - \frac{w^2 R}{g}\right)\cos(\lambda)\,\vec{i} + mg\,\mathrm{sen}(\lambda)\,\vec{j}$$

Plano del ecuador (λ=0)

$$N = mg - m\underbrace{w^2 R}_{0.03395}$$

En los polos (λ=90)

$$N = mg$$

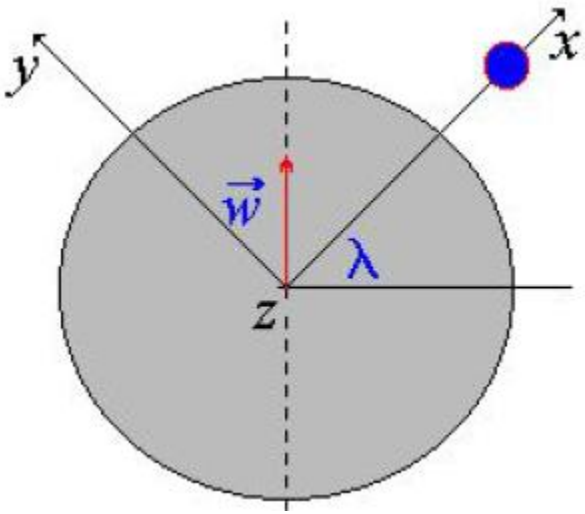
El peso aparente del cuerpo en función de la Latitud es

$$N = mg\left[\varepsilon^2 \cos^2(\lambda) + \mathrm{sen}^2(\lambda)\right]^{1/2} \qquad \varepsilon = \left(1 - \frac{w^2 R}{g}\right)$$

0.9965

La Tierra como un sistema no inercial

Desviación de Coriolis



Consideremos el caso de un cuerpo que se deja caer Desde una altura H de la superficie de la Tierra, la ecuación de movimiento, desde el sistema no inercial fijo a Tierra, resulta ser:

$$m\vec{g} = m\vec{a}_{xyz} + m\vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r} + 2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}$$

Consideremos el caso de un cuerpo que se deja caer desde una altura H de la superficie de la Tierra, la ecuación de movimiento, desde el sistema no inercial fijo a Tierra, resulta ser:

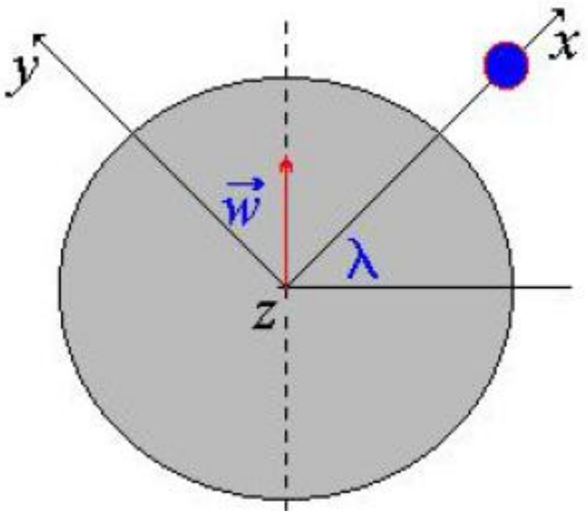
$$m\vec{g} = m\vec{a}_{xyz} + 2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}$$

o, alternativamente

$$m\vec{a}_{xyz} = m\vec{g} - 2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}$$

La Tierra como un sistema no inercial

Desviación de Coriolis



$$m\vec{a}_{xyz} = m\vec{g} - 2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}$$

Evaluando en las distintas componentes resulta

$$\ddot{x} = -g - 2w\dot{z}\cos\lambda$$
$$\ddot{y} = 2w\dot{z}\,\mathrm{sen}\,\lambda$$
$$\ddot{z} = 2w\dot{x}\cos\lambda - 2w\dot{y}\,\mathrm{sen}\,\lambda$$

Trabajando con la primera resulta

$$d\dot{x} = -g\,dt - 2w\cos\lambda\,dz$$

La cual lleva a:

$$\dot{x} = -g\,t - 2wz\cos\lambda$$

De manera similar tenemos para la componente en *y*

$$\dot{y} = 2wz\,\mathrm{sen}\,\lambda$$

$$\ddot{z} = 2wgt\cos\lambda - 4w^2 z$$

La Tierra como un sistema no inercial

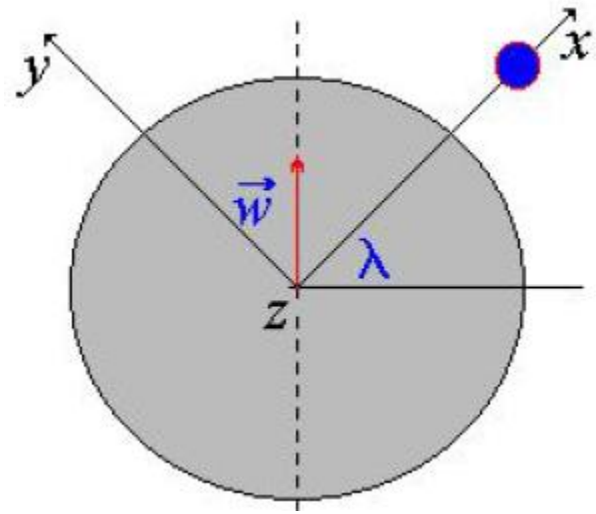
Desviación de Coriolis

$$m\vec{a}_{xyz} = m\vec{g} - 2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}$$

$$\ddot{x} = -g - 2w\dot{z}\cos\lambda$$

$$\ddot{y} = 2w\dot{z}\,\mathrm{sen}\,\lambda$$

$$\ddot{z} = 2w\dot{x}\cos\lambda - 2w\dot{y}\,\mathrm{sen}\,\lambda$$



Utilizando las dos componentes halladas en la componente z resulta:

$$\ddot{z} = 2wgt\cos\lambda - 4w^2 z$$

y, despreciando el termino cuadrático.

$$\ddot{z} = 2wgt\cos\lambda$$

Integrando una vez en el tiempo resulta

$$\dot{z} = -wgt^2\cos\lambda$$

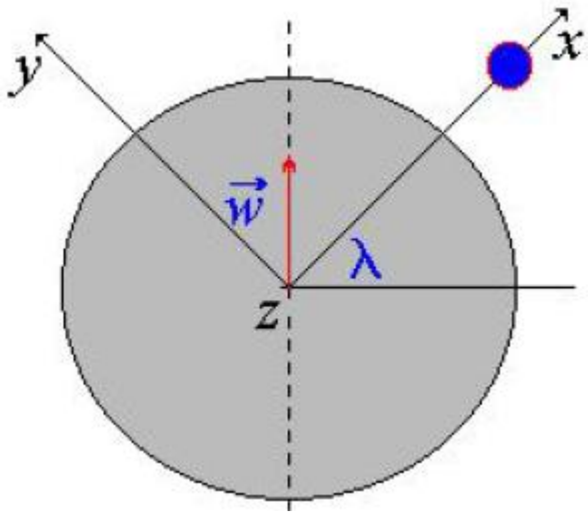
Integrando nuevamente

$$z = -\tfrac{1}{3}wgt^3\cos\lambda$$

La Tierra como un sistema no inercial

Desviación de Coriolis

$$m\vec{a}_{xyz} = m\vec{g} - 2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}$$



$$\boxed{z = -\frac{1}{3} w g t^3 \cos\lambda}$$

La desviación en **es el sentido de rotación de la Tierra**

La desviación es **nula en los polos**

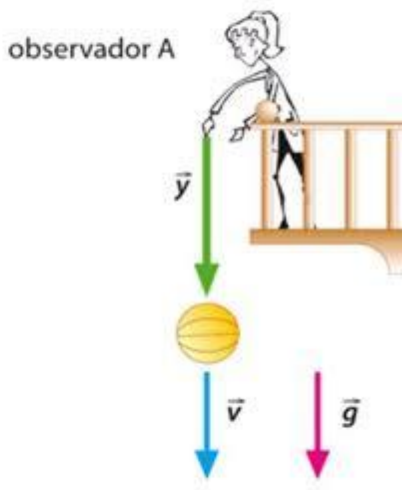
La desviación es **máxima en el ecuador**

v=wR=1,674.4 km/h (465.1 m/s) (ecuatorial)
R=6371.0 km =6371000 m (radio medio)
w=0.0000729 rad/s

Desviación de Coriolis

Se deja caer (desde el reposo) un cuerpo de 500 gramos desde 3 metros de altura. Teniendo en cuenta la velocidad de rotación de la Tierra, diga:

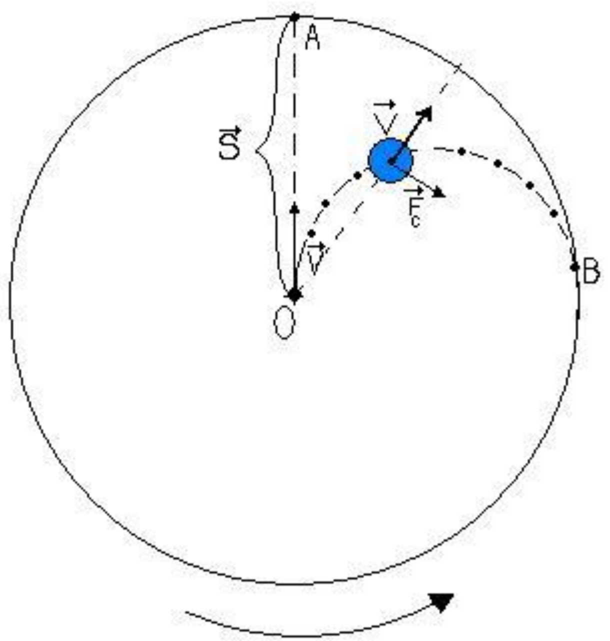
a) ¿qué tanto se va a apartar el cuerpo respecto de la vertical?
b) ¿Cuál es la el vector velocidad del cuerpo en el momento en que alcanza el suelo?



La Tierra como un sistema no inercial

Desviación de Coriolis

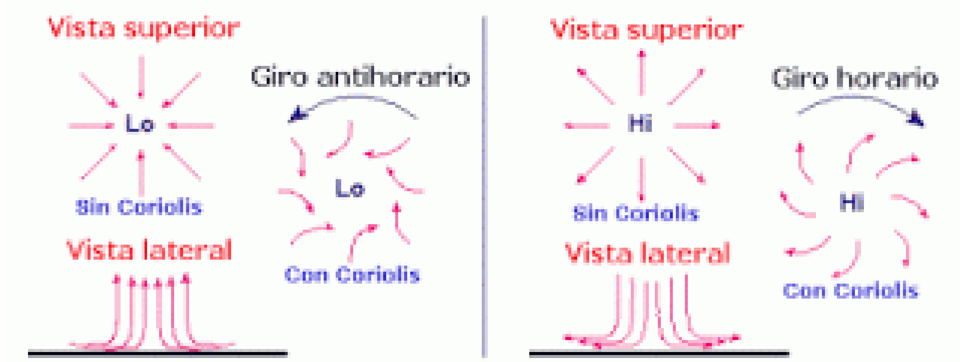
$$m\vec{a}_{xyz} = m\vec{g} - 2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}$$



Gaspard Gustav Coriolis. El fue un matemático e ingeniero francés que en 1835 expresó que todo sistema en rotación ejerce sobre cualquier objeto que se desplace sobre él una fuerza perpendicular a la dirección de su movimiento torciendo su trayectoria.

La Tierra como un sistema no inercial

Desviación de Coriolis



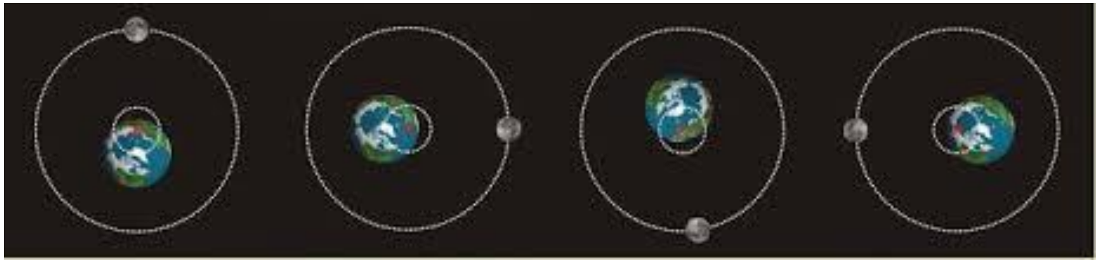
La Tierra como un sistema no inercial

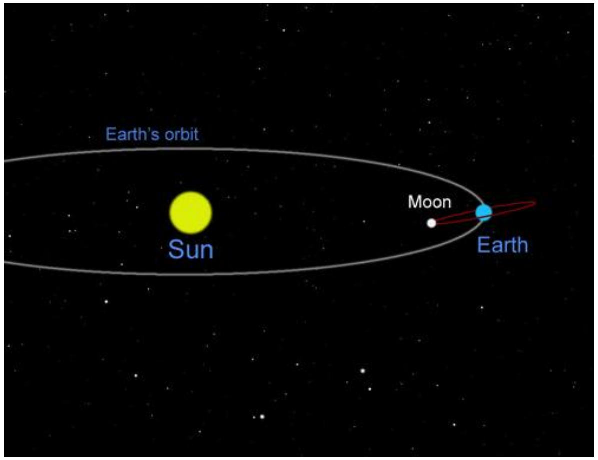
Desviación de Coriolis

La rotación de la Tierra también proporciona cierta aceleración (definida como *Aceleración de Coriolis* o Efecto Coriolis). Esta aceleración provoca que los sistemas ciclónicos giren hacia los polos en ausencia de una corriente fuerte de giro (por ejemplo en el norte, la parte al norte del ciclón tiene vientos al oeste y la fuerza de Coriolis los empuja ligeramente en esa dirección. Así, los ciclones tropicales en el hemisferio norte, que habitualmente se mueven al oeste en sus inicios, giran al norte (y normalmente después son empujados al este), y los ciclones del hemisferio sur son desviados en esa dirección si no hay un sistema de fuertes presiones contrarrestando la aceleración de Coriolis. Esta aceleración también inicia la rotación ciclónica, pero no es la fuerza conductora que hace que aumente su velocidad. Estas velocidades se deben a la conservación del momento angular -el aire se capta en un área mucho más grande que el ciclón, por lo que la pequeña velocidad de rotación (originalmente proporcionada por la aceleración de Coriolis) aumenta rápidamente a medida que el aire entra en el centro de bajas presiones.

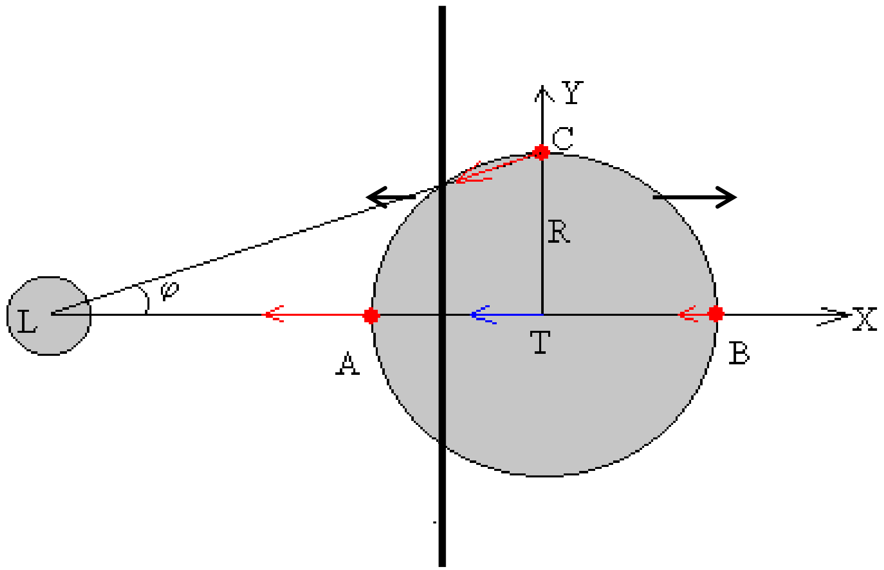
[redacted]

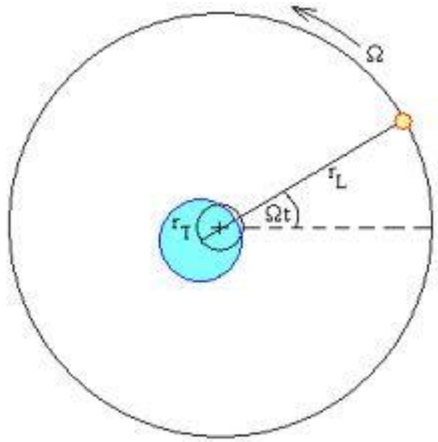
La Tierra como un sistema no inercial

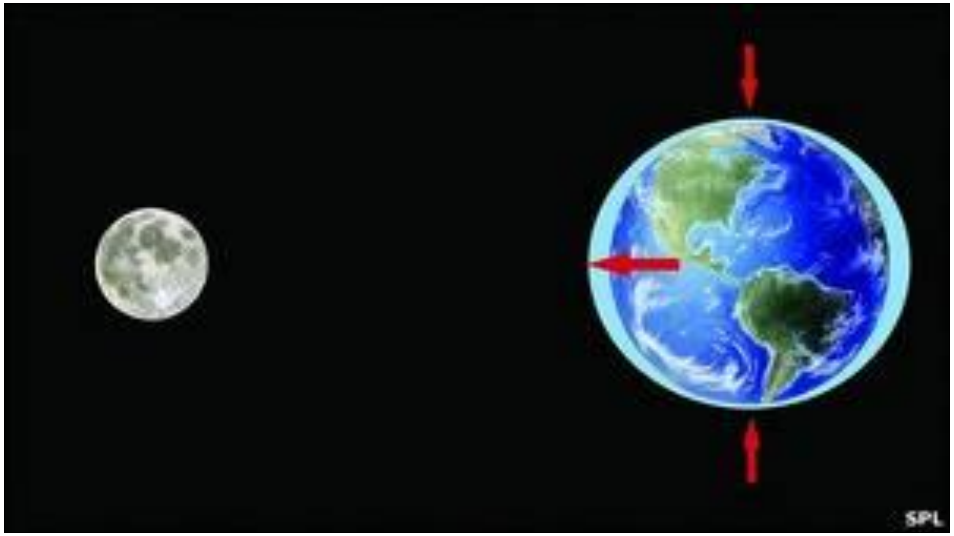


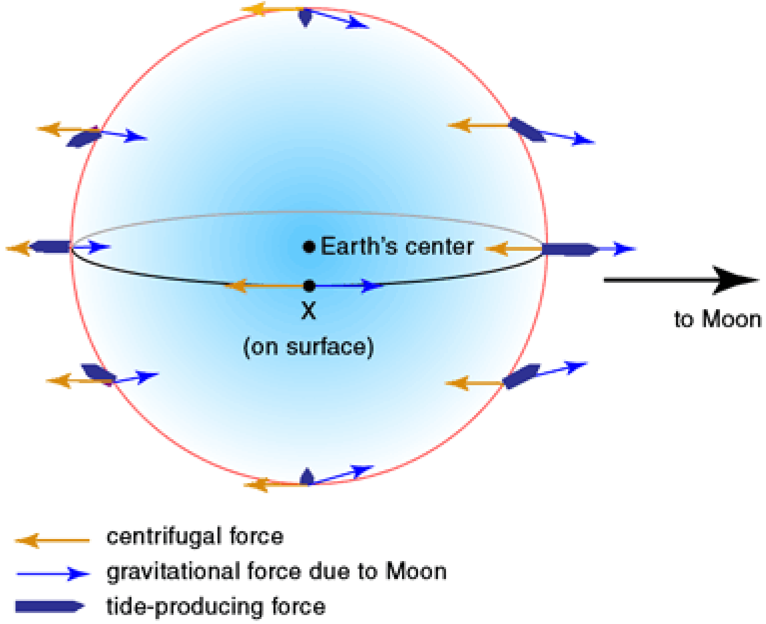


La Tierra como un sistema no inercial









[redacted]

La Tierra como un sistema no inercial

Disipación

• Las mareas introducen disipación (en promedio 3.75 teraWatt).

• Las mareas crean un torque sobre la Luna y esto es transferido al momento angular de la Luna en su orbita y así aumenta la distancia Tierra-Luna.

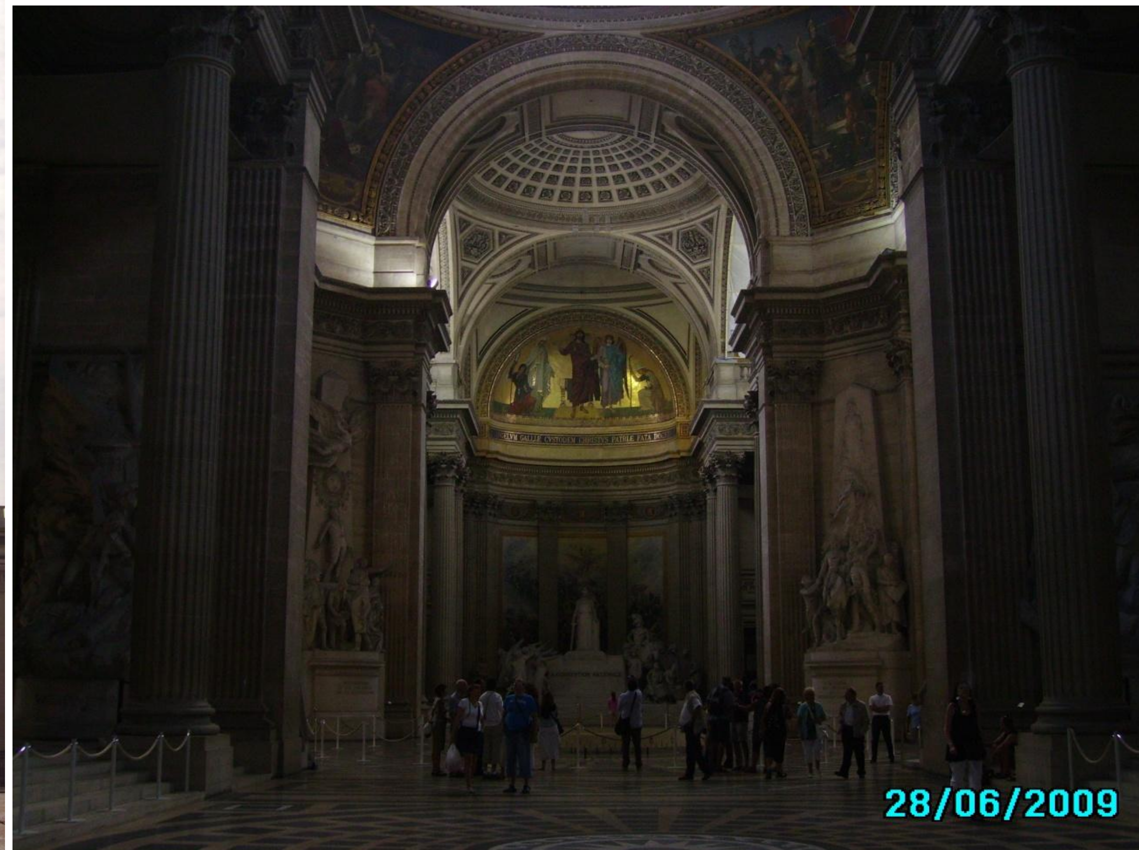
•De la misma manera y por la misma razón la velocidad de rotación de la Tierra disminuye.

• La distancia Tierra-Luna cambia en unos 3.8 centimetros /año.

• La longitud de los días se ha incrementado en algo así como 2 horas en los últimos 600 millones de años.

• Una aproximación cruda nos diría que 70 millones de años atrás la longitud del día era un 1% más corto y así el año tenía unos 4 días más.

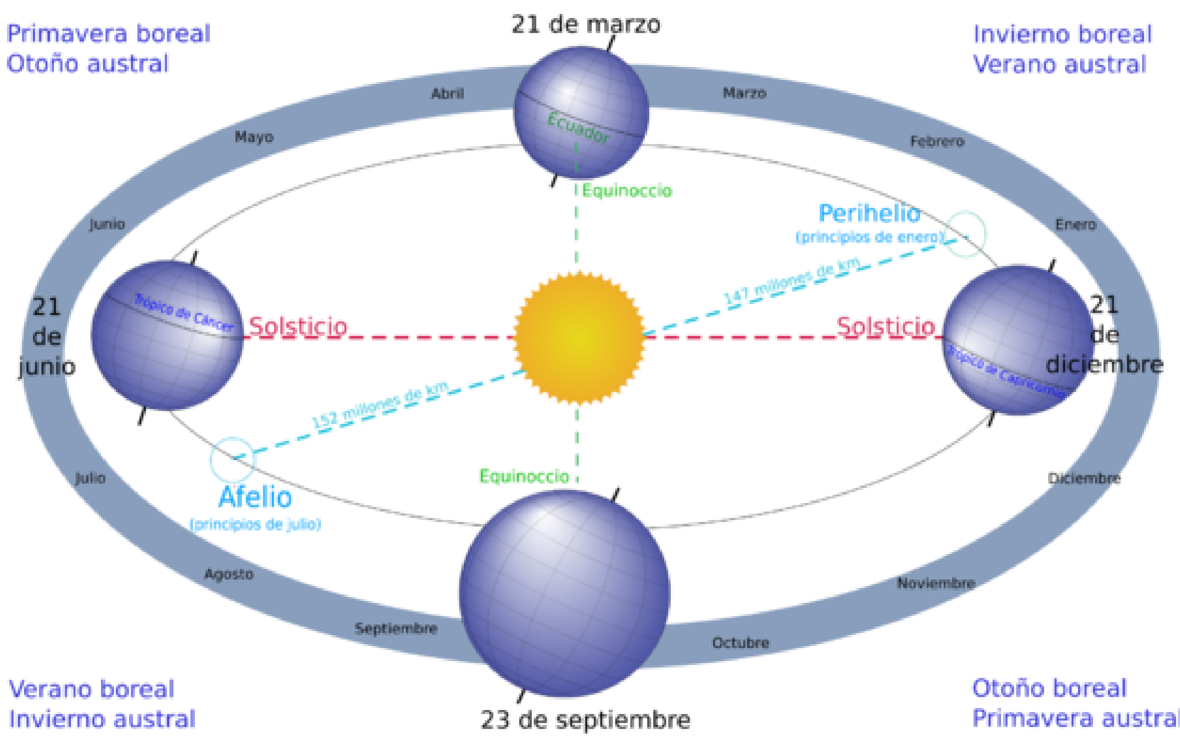
Panthéon, Paris




AUX GRANDS HOMMES LA PATRIE RECONNAISSAN
28/06/2009

La Tierra como un sistema no inercial

Las estaciones en la Tierra



Las estaciones en la Tierra