Energía Mecánica

Comenzamos con el teorema de las fuerzas vivas:

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = T_B - T_A}$$

Discriminamos ahora las fuerzas para tener en cuenta las **fuerzas conservativas** y las **no-conservativas**

$$\int_A^B \left(\vec{F}_C + \vec{F}_{NC} \right) \cdot d\vec{r} = T_B - T_A$$

Separando las contribuciones de las distintas fuerzas quedaría:

$$\int_A^B \vec{F}_C \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r} = T_B - T_A$$

Energía Mecánica

Ahora, cada una de las **fuerzas conservativas** puede asociarse a una **energía potencial**

$$\Phi = \sum_i \Phi_i$$

Con lo cual resulta

$$\int_A^B \vec{F}_C \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(\sum_i F_{Ci} \right) \cdot d\vec{r} = \sum_i \int_A^B \vec{F}_{Ci} \cdot d\vec{r} = -\sum_i \left(\Phi_{iB} - \Phi_{iA} \right)$$

O bien

$$\int_A^B \vec{F}_C \cdot d\vec{r} = -\left(\sum_i \Phi_{iB} - \sum_i \Phi_{iA} \right) = -\left(\Phi_B - \Phi_A \right)$$

Energía Mecánica

Reemplazando las contribuciones hechas por las fuerzas conservativas en

$$\int_A^B \left(\vec{F}_C + \vec{F}_{NC}\right) \cdot d\vec{r} = T_B - T_A$$

resulta

$$\int_A^B \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r} = \left(T_B - T_A\right) + \left(\Phi_B - \Phi_A\right)$$

La que podemos reescribir como sigue

$$\int_A^B \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r} = \left(T_B + \Phi_B\right) - \left(T_A + \Phi_A\right)$$

Energía Mecánica

Definiendo la **Energía Mecánica** como

$$E=T+\Phi$$

La expresión para el trabajo

$$\int_A^B \left(\vec{F}_C + \vec{F}_{NC}\right)\cdot d\vec{r} = T_B - T_A$$

$$\int_A^B \vec{F}_{NC}\cdot d\vec{r} = \left(T_B + \Phi_B\right) - \left(T_A + \Phi_A\right)$$

Nos lleva a

$$\boxed{\int_A^B \vec{F}_{NC}\cdot d\vec{r} = E_B - E_A}$$

Energía Mecánica

Teorema de conservación de la energía mecánica

Si las fuerzas actuantes en el sistema son todas de tipo conservativo, la expresion

$$\boxed{\int_A^B \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r} = E_B - E_A}$$

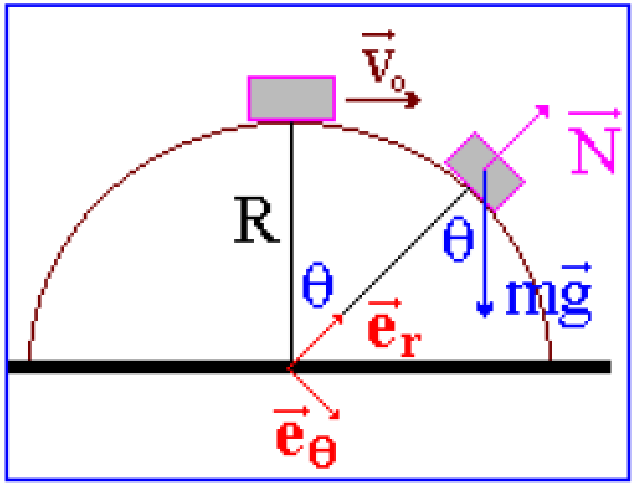
Nos lleva a que:

$$\boxed{0 = E_B - E_A}$$

La energía que la partícula tiene al comienzo del movimiento es la misma que la que tiene en cualquier otro momento del mismo.

Energía Mecánica

Ejemplo



$$T + \Phi = T_\circ + \Phi_\circ$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta = \frac{1}{2}mv_\circ^2 + mgR$$

$$v^2 = v_\circ^2 + 2gR(1-\cos\theta)$$

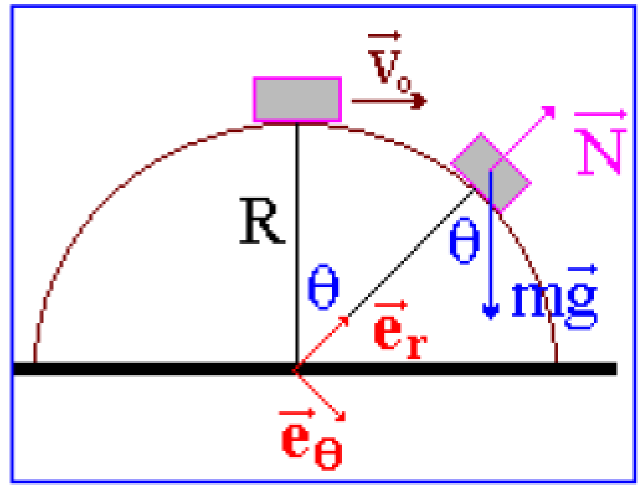
$$v = r\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v_\circ^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)$$

Energía Mecánica

Ejemplo

Planteando las ecuaciones de Newton resulta



$$\vec{e}_r \rightarrow N - mg\cos\theta = mR\dot{\theta}^2$$

$$\vec{e}_\theta \rightarrow mg\,\mathrm{sen}\,\theta = mR\ddot{\theta}$$

Utilizando la expresión hallada para la velocidad angular, resulta

$$N = 3mg\cos\theta - 2mg - m\frac{v_\circ}{R}$$

$$v_\circ \leq \sqrt{Rg}$$

Y de ésta, obtenemos el ángulo de despegue:

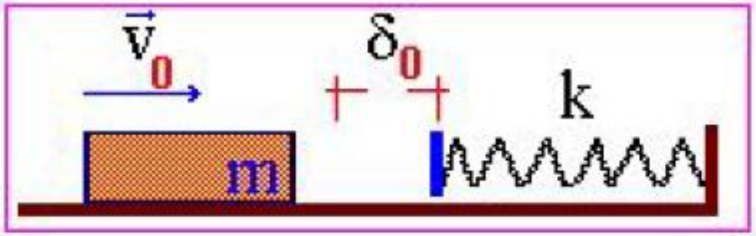
$$\cos\theta = \frac{2}{3} + \frac{v_\circ^2}{3Rg}$$

$$\boxed{\frac{2}{3} + \frac{v_\circ^2}{3Rg} \leq 1 \quad \therefore \quad \frac{v_\circ^2}{3Rg} \leq \frac{2}{3}}$$

Energía Mecánica

Ejemplo

$$E = E_0$$

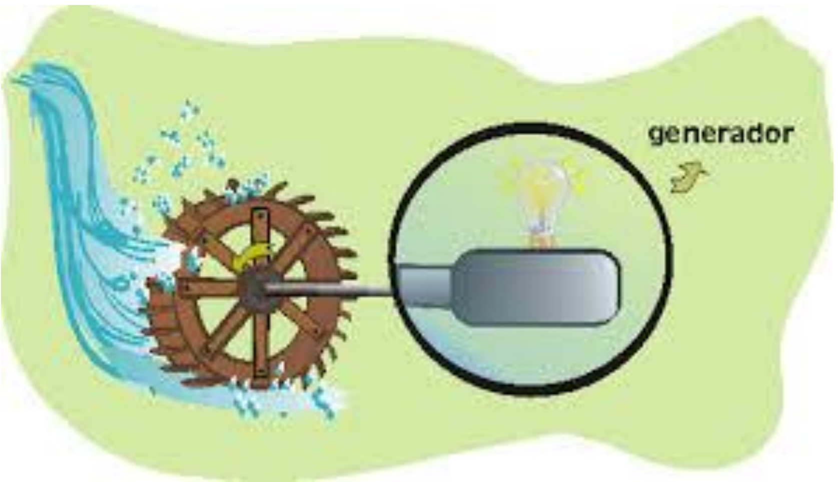


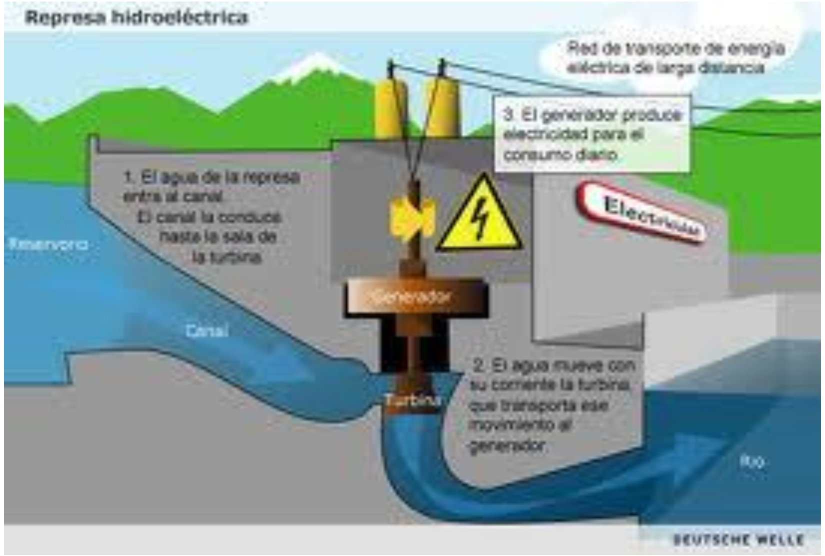
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\delta^2 = \frac{1}{2}mv_\circ^2 + \frac{1}{2}k\delta_\circ^2$$

$$v^2 = v_\circ^2 - \frac{k}{m}\left(\delta^2 - \delta_\circ^2\right)$$

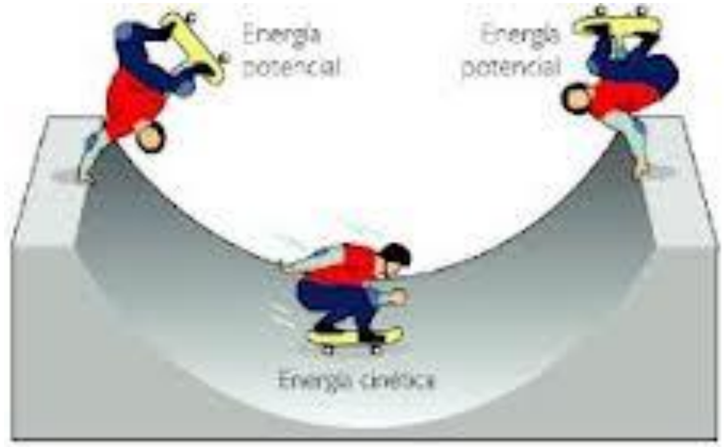
$$\delta_m = \sqrt{\delta_\circ^2 + \frac{m}{k}v_\circ^2}$$

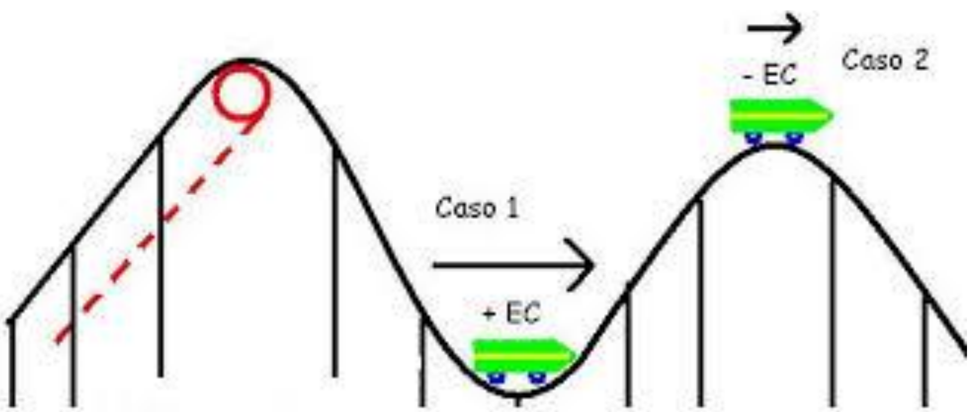
Energía Mecánica





Energía Mecánica





Energía Mecánica

¿Se pueden identificar en un grafico las energías mecánica, cinética y potencial?

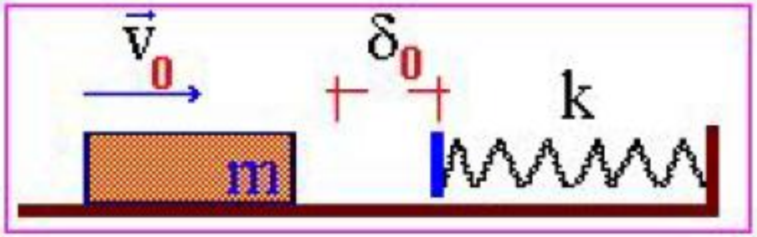
¿Cómo?

¿Y…..como definiría la energía mecánica?

¿Como se interpreta esa magnitud físicamente?

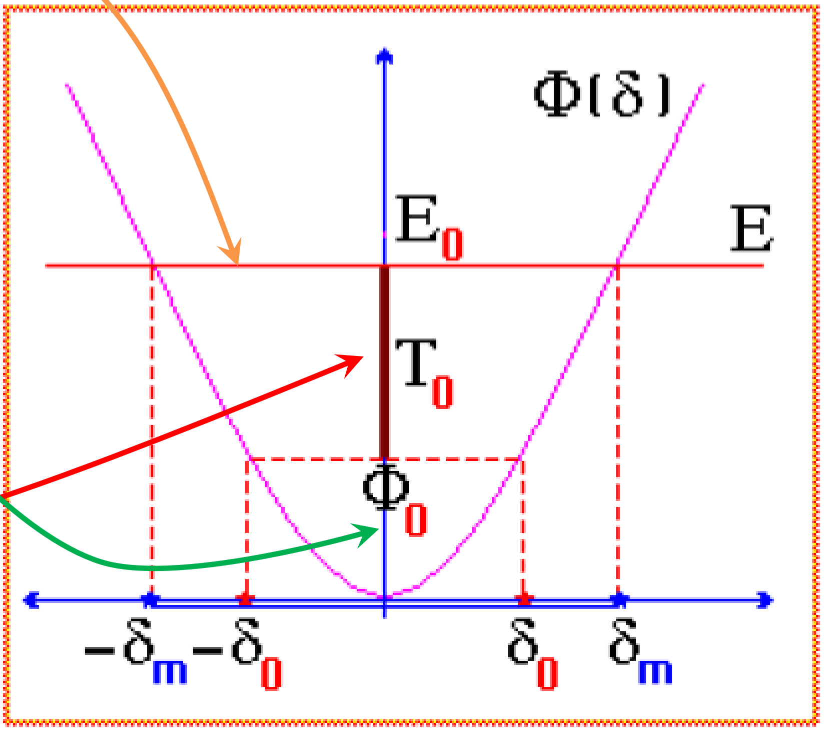
Energía Mecánica

Ejemplo



$$E = E_0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\delta^2 = \boxed{\frac{1}{2}mv_\circ^2} + \boxed{\frac{1}{2}k\delta_\circ^2}$$



Energía Mecánica

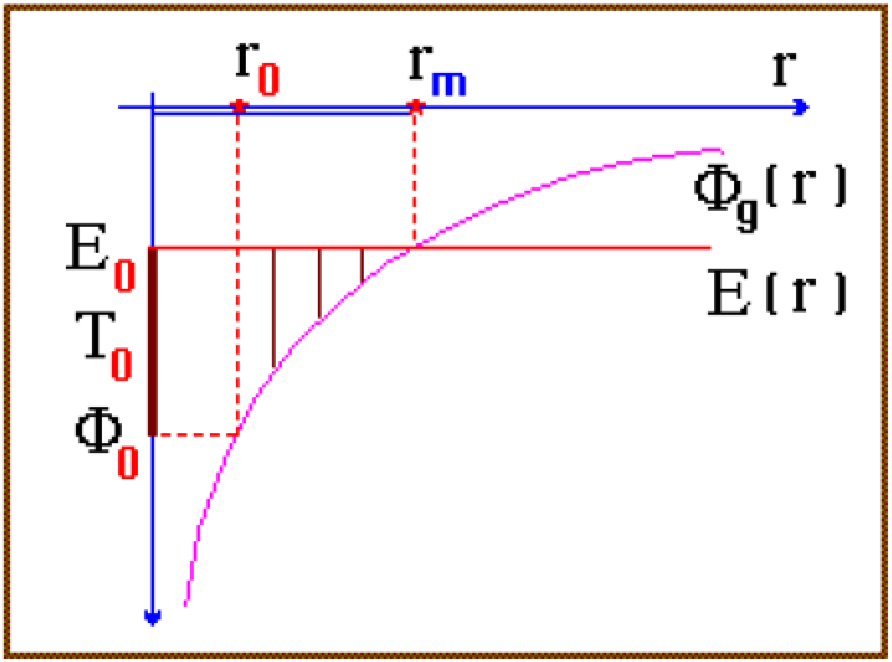
Ejemplo: Campo Gravitatorio

$$E(r) = E_\circ$$

$$T + \Phi(r) = T_\circ + \Phi(r_\circ)$$

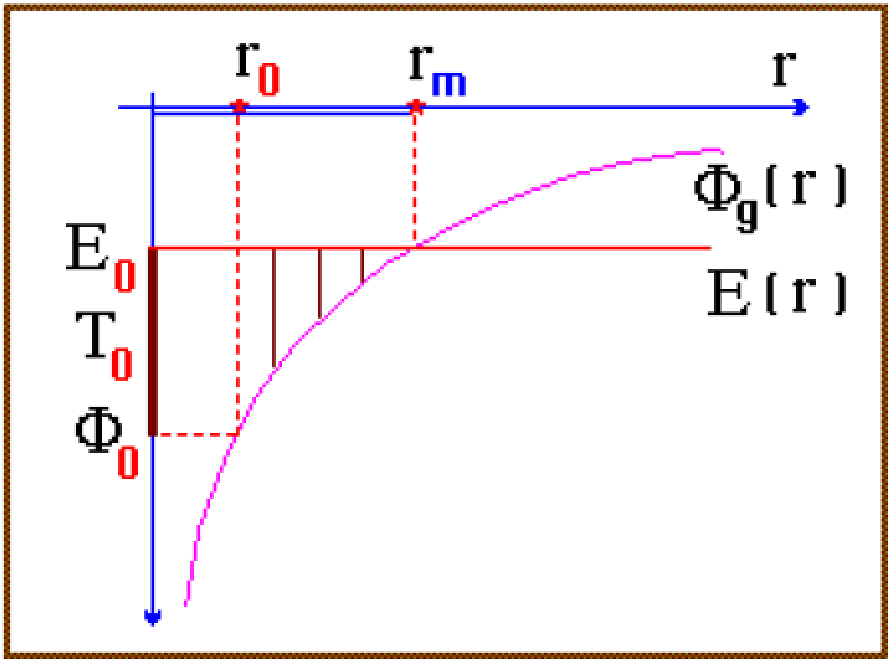
$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = \frac{1}{2}mv_\circ^2 - G\frac{mM}{r_\circ}$$

$$v^2 = v_\circ^2 - 2GM\left(\frac{1}{r_\circ} - \frac{1}{r}\right)$$



Energía Mecánica

Ejemplo: Campo Gravitatorio



$$E = T_\circ + \Phi_\circ$$

$$T(r) = E_\circ - \Phi(r)$$

De esta expresión se ve que la energía cinética esta limitada, cuando la energía potencial se hace igual a la mecánica, la energía cinética debe ser cero.

$$\Phi(r_m) = E_\circ \quad \Rightarrow \quad r_m = -G\frac{mM}{E_\circ}$$

Esto define un radio de alcance máximo