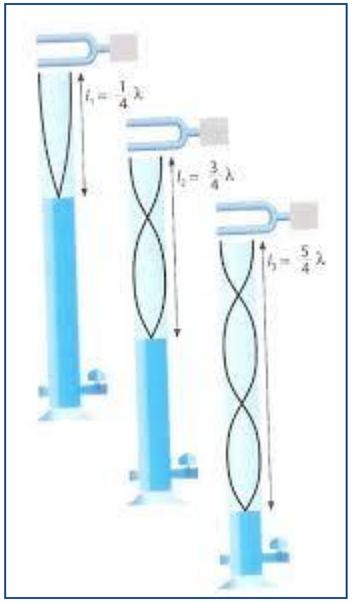
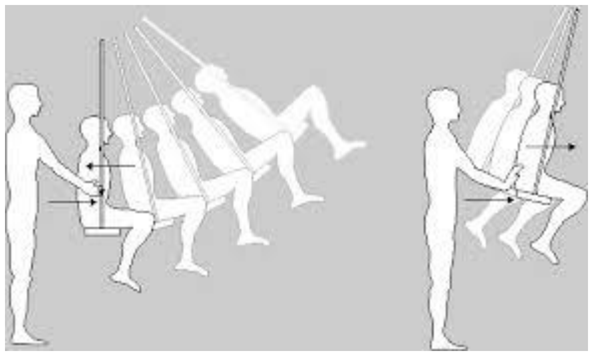
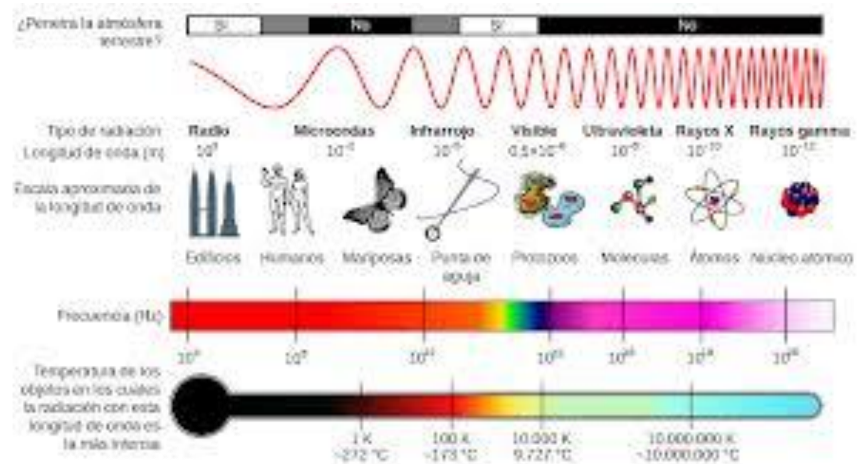
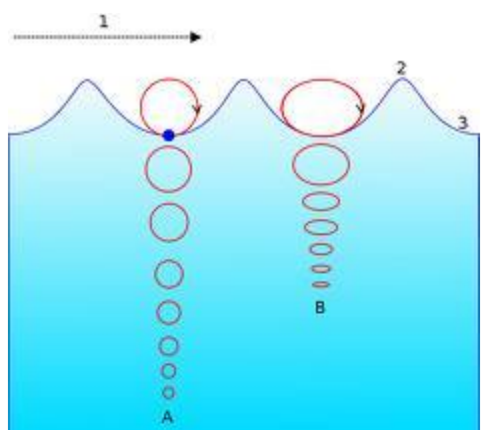
Oscilaciones

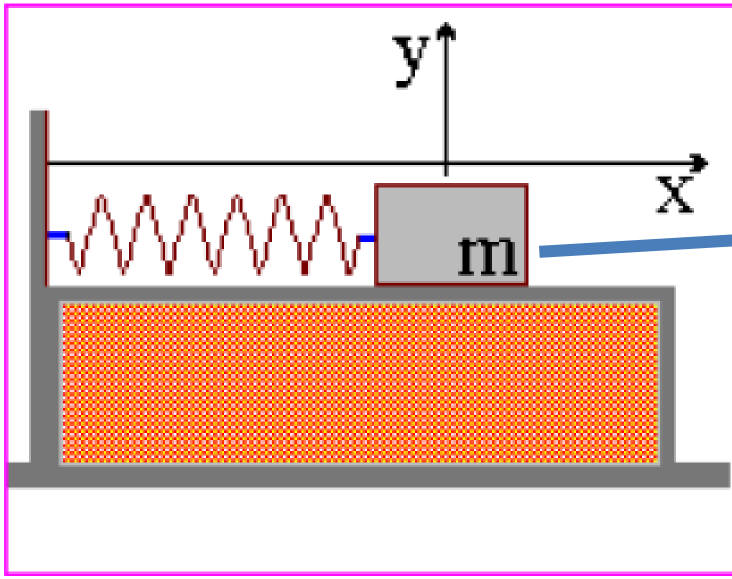


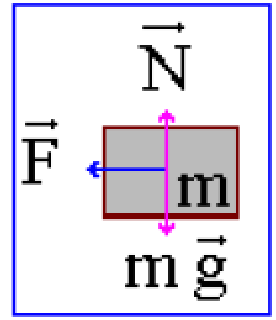






Oscilaciones





$$\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Fuerza elástica del resorte

$$\boxed{\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}}$$

Definiendo las ecuaciones en componentes Cartesianas resulta:

$$\hat{j}) \qquad N - mg = 0$$

$$\hat{i}) \qquad -k\,x = m\,\ddot{x}$$

Oscilaciones

$\hat{i})\quad -\mathrm{k}\,\mathrm{x} = \mathrm{m}\,\ddot{\mathrm{x}}$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \qquad donde \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Oscilaciones

$\hat{i})\qquad -\mathrm{k\,x} = \mathrm{m}\,\ddot{\mathrm{x}}$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \qquad donde \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

¿Que funciones conocemos que den movimientos como el del resorte?

Oscilaciones

$\hat{i})\qquad -\mathrm{k}\,\mathrm{x} = \mathrm{m}\,\ddot{\mathrm{x}}$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \qquad donde \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

¿Que funciones conocemos que den movimientos como el del resorte?

Tomemos por ejemplo:

$$x = \cos(a\,t)$$

Oscilaciones

$\hat{i}) \quad -\mathrm{k\,x} = \mathrm{m\,\ddot{x}}$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \qquad \textit{donde} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

¿Que funciones conocemos que den movimientos como el del resorte?

Tomemos por ejemplo:

$$x = \cos(a\,t) \qquad \dot{x} = a\sin(a\,t) \qquad \ddot{x} = -a^2\cos(a\,t)$$

Oscilaciones

$\hat{i})\quad -k\,x = m\,\ddot{x}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

$x = \cos(a\,t)$ $\quad\quad$ $\dot{x} = -a\sin(a\,t)$ $\quad\quad$ $\ddot{x} = -a^2\cos(a\,t)$

Reemplazando en la ecuación resulta:

$$\left(-a^2 + \omega_0^2\right)\cos(a\,t) = 0$$

Oscilaciones

$$\hat{i})\quad -\mathrm{k}\,\mathrm{x} = \mathrm{m}\,\ddot{\mathrm{x}} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$x = \cos(a\,t) \qquad \dot{x} = -a\sin(a\,t) \qquad \ddot{x} = -a^2\cos(a\,t)$$

Reemplazando en la ecuación resulta:

$$\left(-a^2 + \omega_0^2\right)\cos(a\,t) = 0$$

$$\Downarrow$$

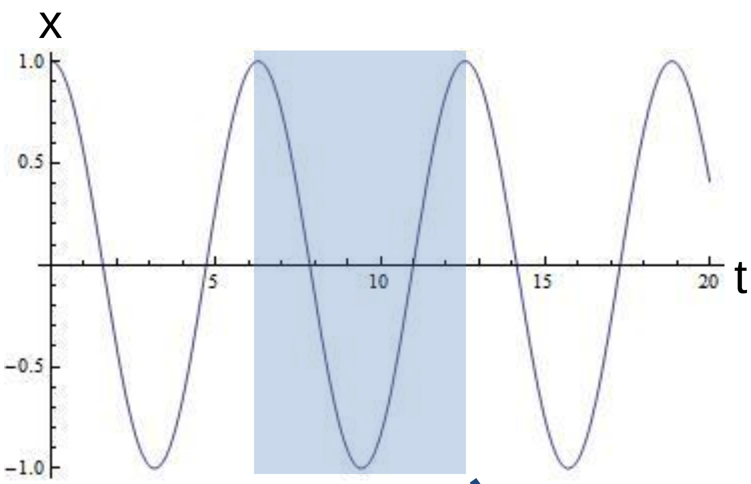
$$a = \pm\sqrt{\omega_0^2} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$$

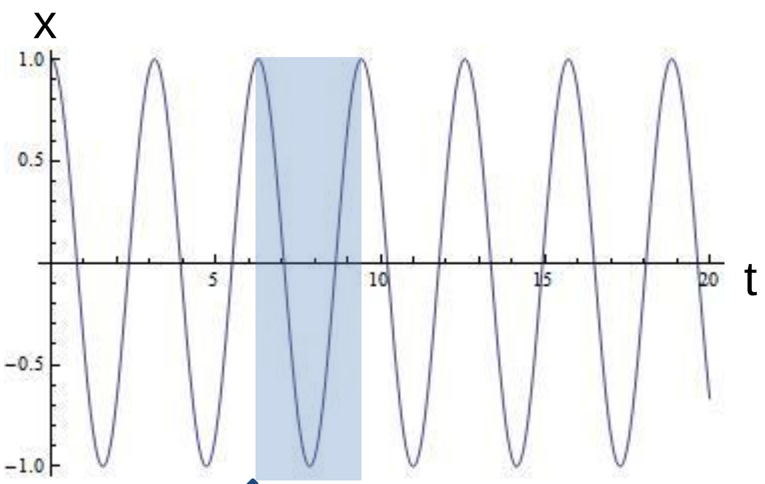
Oscilaciones

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.
(segunda derivada en el tiempo)

Una solución es: $x = A\cos(\omega_0 t)$





$\omega_0 = 1$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Período

$\omega_0 = 2$

Oscilaciones

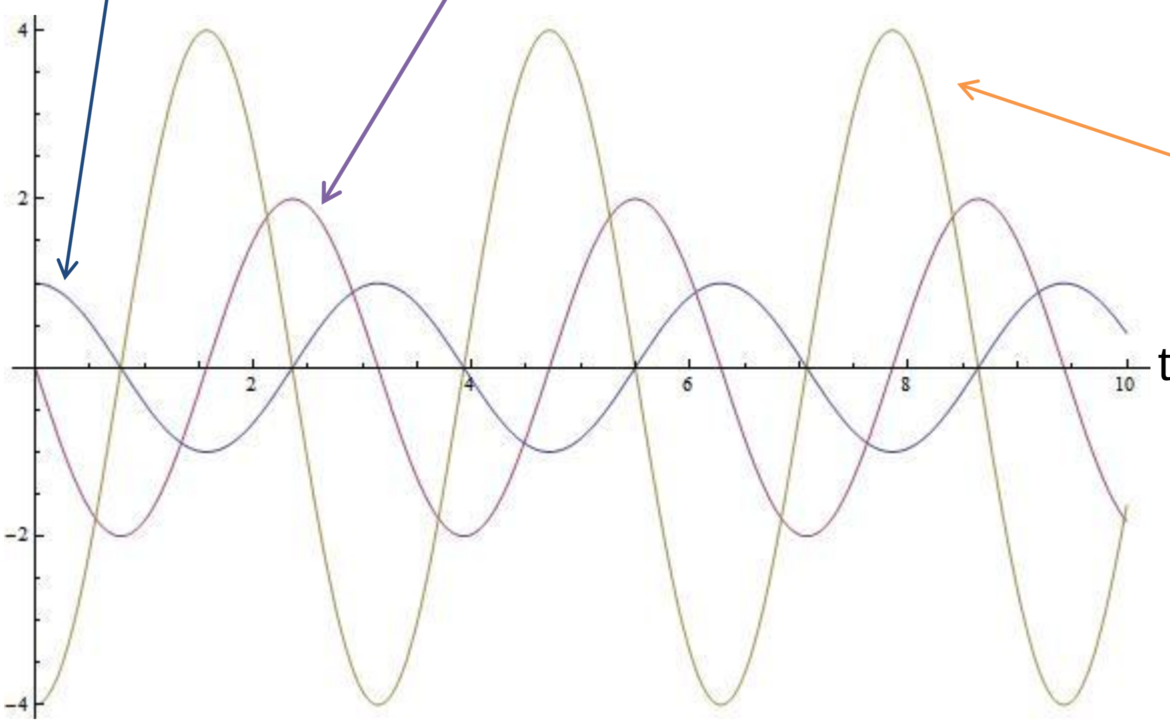
$$\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2 x=0}$$

Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.
(segunda derivada en el tiempo)

$$x=\cos(2t)$$

$$\dot{x}=-2\sin(2t)$$

$$\ddot{x}=-4\cos(2t)$$



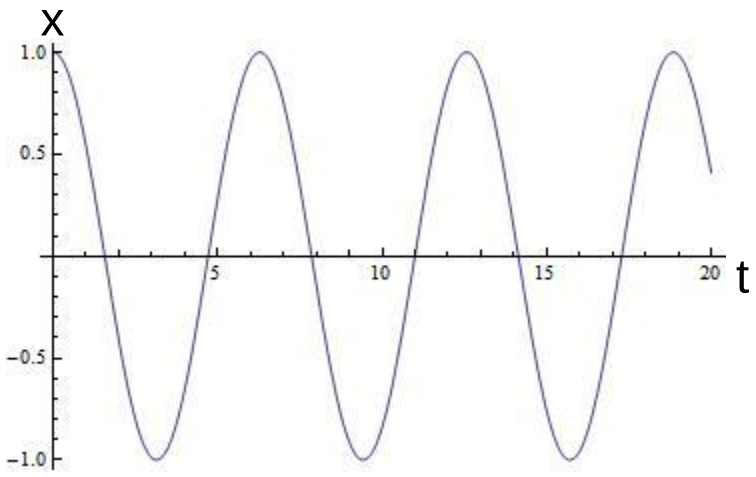
Oscilaciones

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.
(segunda derivada en el tiempo)

Una solución es: $x = A\cos(\omega_0 t)$

¿Existe otra solución?



$\omega_0 = 1$

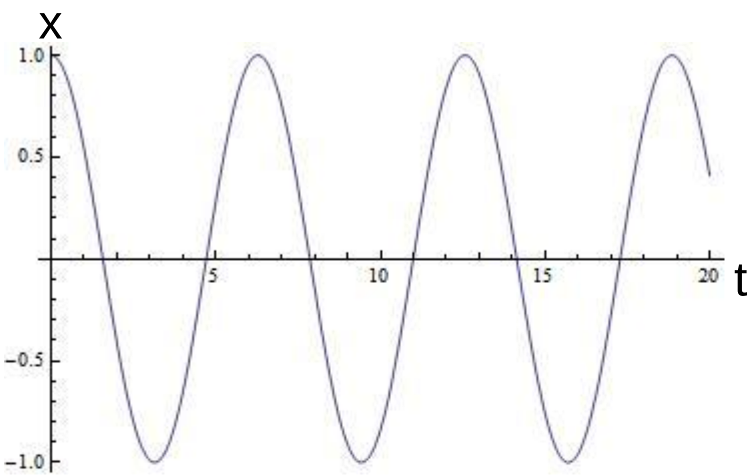
Oscilaciones

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$$

Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

(segunda derivada en el tiempo)

Una solución es: $x=A\cos(\omega t)$



$\omega_0=1$

¿Existe otra solución?

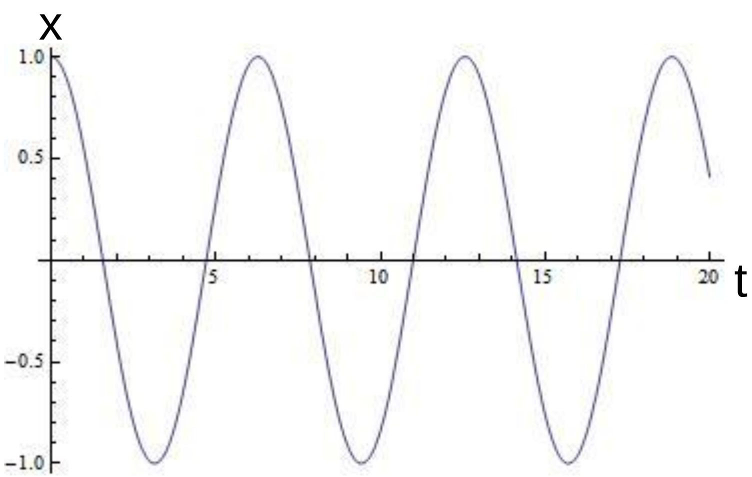
$$x=B\sin(\omega_0 t)$$

Oscilaciones

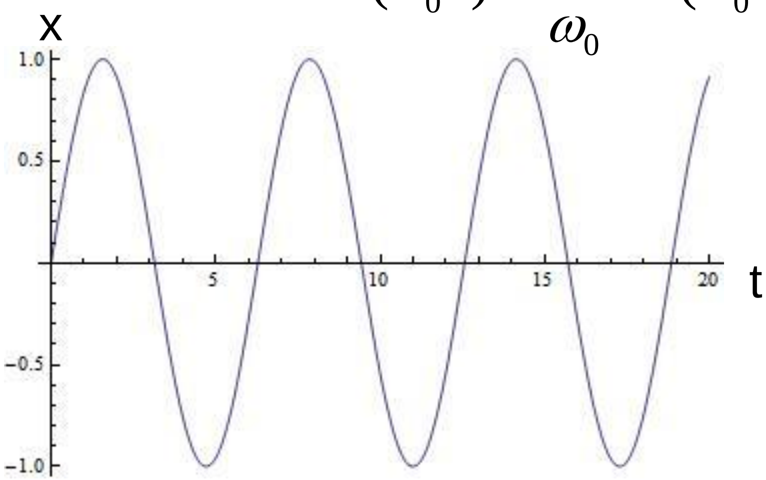
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

$$x = A\cos(\omega_0 t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$



$$x = B\sin(\omega_0 t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$



$$t = 0 \quad \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

Condiciones iniciales

$$t = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases}$$

Oscilaciones

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

Solución más general posible

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$$

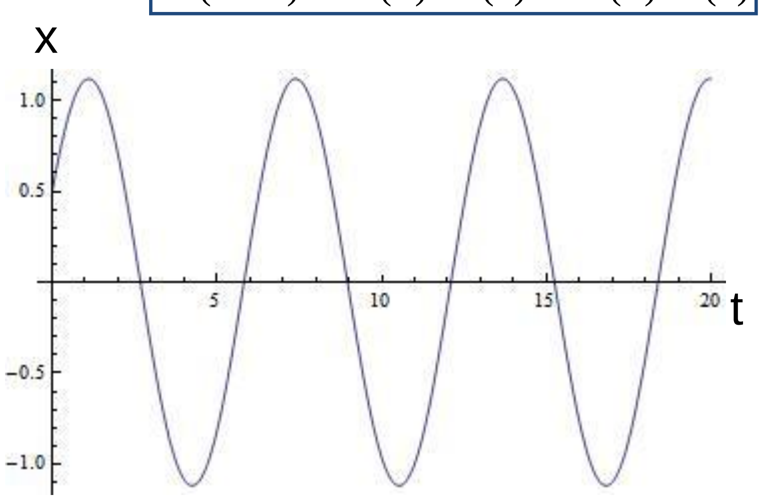
$$x = C\sin(\omega_0 t + \delta)$$

$$\begin{cases} A = C\sin(\delta) \\ B = C\cos(\delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C^2 = A^2 + B^2 \\ tg(\delta) = \dfrac{A}{B} \end{cases}$$

$$\sin(x+\delta) = \sin(\delta)\cos(x) + \cos(\delta)\sin(x)$$

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\tan(\delta) = \frac{x_0 \omega_0}{\dot{x}_0}$$



Oscilaciones

$$\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2 x=0}$$

Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

Solución más general posible

$$x=x_0\cos(\omega_0 t)$$

$$x=\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

$$\left\{\begin{array}{l} A=C\sin(\delta) \\ B=C\cos(\delta) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C^2=A^2+B^2 \\ tg(\delta)=\dfrac{A}{B} \end{array}\right\}$$

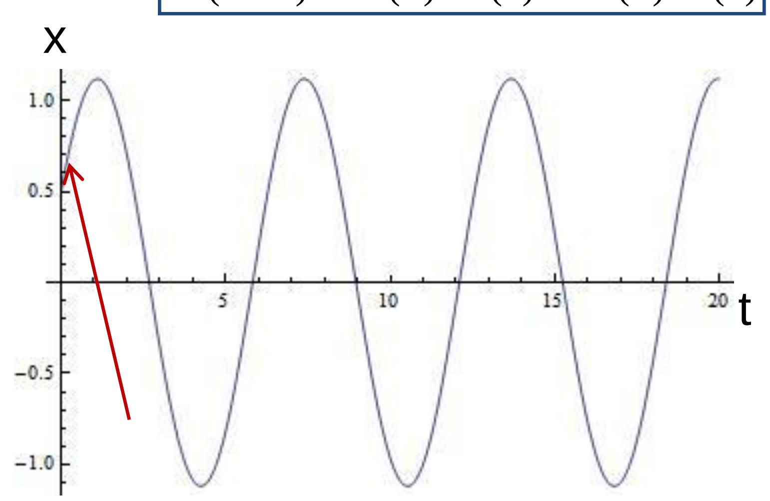
$$\sin(x+\delta)=\sin(\delta)\cos(x)+\cos(\delta)\sin(x)$$

$$\boxed{x=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)}$$

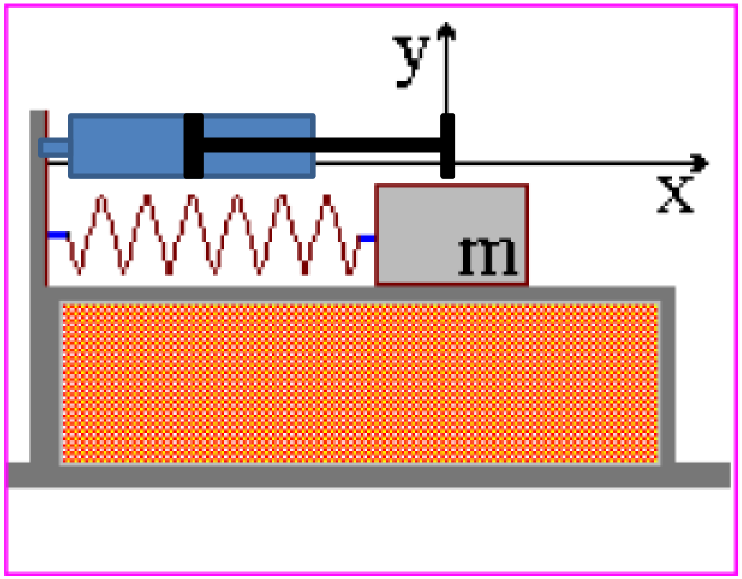
$$C=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\tan(\delta)=\frac{x_0\omega_0}{\dot{x}_0}$$

$$x=C\sin(\omega_0 t+\delta)$$



Oscilaciones amortiguadas



$$\vec{F}_e + \vec{N} + \vec{F}_v + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_e = -k_e x\,\hat{i}$$

$$\vec{F}_v = -k_v \dot{x}\,\hat{i}$$

$\hat{i})\qquad -k_e\,x - k_v\,\dot{x} = m\,\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\ddot{x} + k_1\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

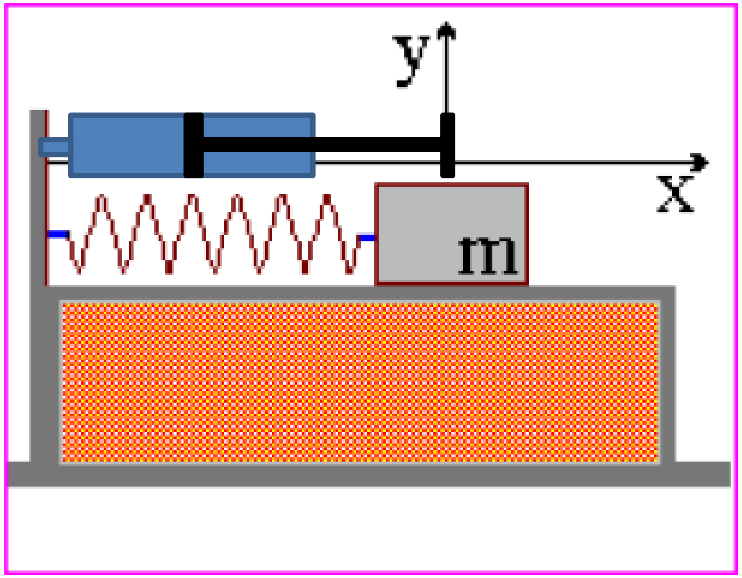
$\hat{j})\qquad N - mg = 0$

$$k_1 = \frac{k_v}{m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k_e}{m}$$

Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

Oscilaciones amortiguadas



Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

$$\ddot{x} + k_1 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

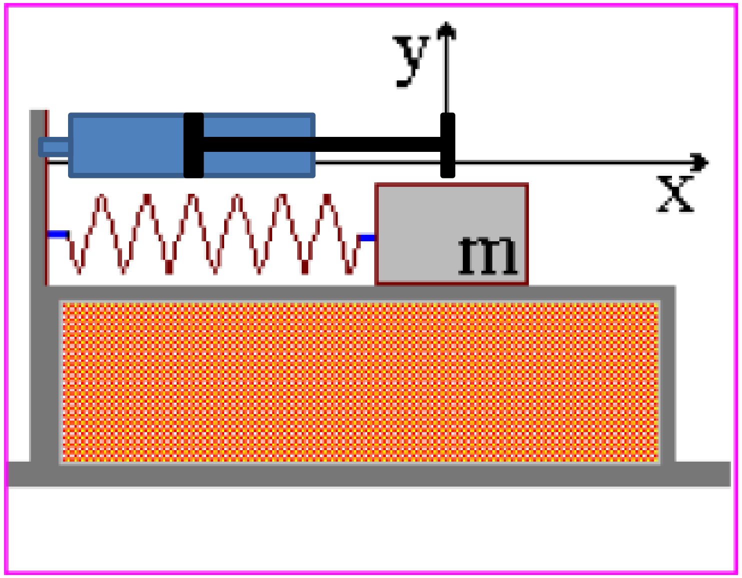
$$k_1 = \frac{k_v}{m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k_e}{m}$$

Proponemos como solución

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

Oscilaciones amortiguadas



Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

$$\ddot{x} + k_1 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$k_1 = \frac{k_v}{m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k_e}{m}$$

Proponemos como solución

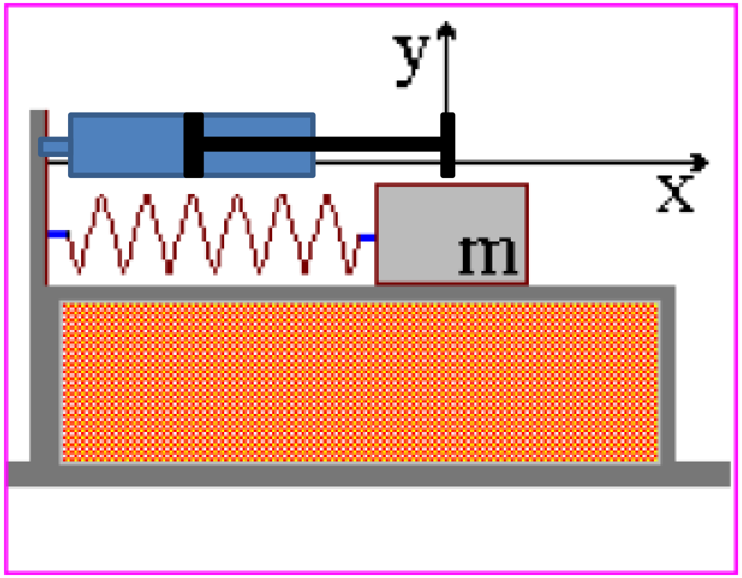
$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

Necesitamos además, las derivadas primera y segunda de la solución:

$$\dot{x} = -\alpha e^{-\alpha t} u(t) + e^{-\alpha t} \dot{u}(t)$$

$$\ddot{x} = \alpha^2 e^{-\alpha t} u(t) - 2\alpha e^{-\alpha t} \dot{u}(t) + e^{-\alpha t} \ddot{u}(t)$$

Oscilaciones amortiguadas



Reemplazando las expresiones anteriores en la ecuación

$$\ddot{x} + k_1\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

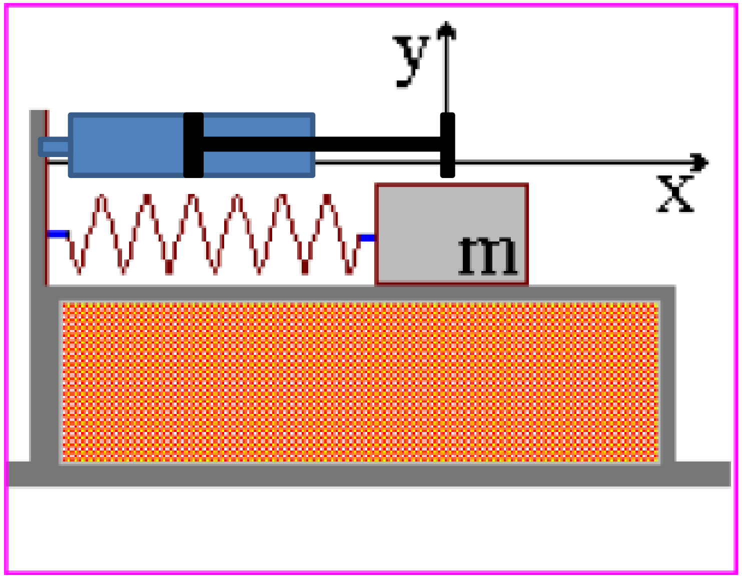
Resulta:

$$\left[\alpha^2 u(t) - 2\alpha\dot{u}(t) + \ddot{u}(t)\right]e^{-\alpha t} + k_1\left[\dot{u}(t) - \alpha u(t)\right]e^{-\alpha t} + \omega_0^2 u(t)e^{-\alpha t} = 0$$

Reordenando nos queda:

$$\ddot{u}(t) + \left[k_1 - 2\alpha\right]\dot{u}(t) + \left[\omega_0^2 - k_1\alpha + \alpha^2\right]u(t) = 0$$

Oscilaciones amortiguadas



La ecuación

$$\boxed{\ddot{x} + k_1\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

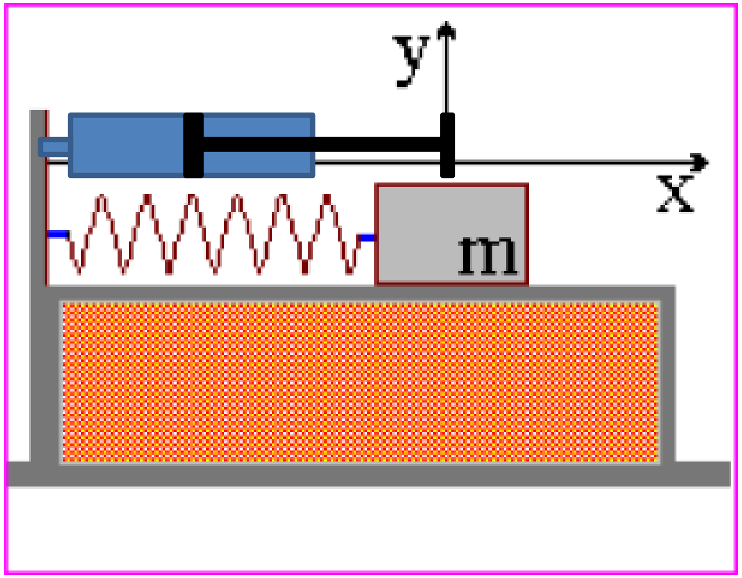
Se transforma en:

$$\ddot{u}(t) + [k_1 - 2\alpha]\dot{u}(t) + [\omega_0^2 - k_1\alpha + \alpha^2]u(t) = 0$$

Si elegimos $k_1 - 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{k_1}{2}$ resulta:

$$\ddot{u}(t) + \Omega^2\,u(t) = 0$$ donde: $$\Omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$$

Oscilaciones amortiguadas



La ecuación

$$\ddot{x} + k_1\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Se transforma en:

$$\ddot{u}(t) + \Omega^2\,u(t) = 0$$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$$

$$\alpha = \frac{k_1}{2}$$

cuando elegimos $\omega_0 > \alpha$, así resulta:

$$u(t) = u_0\cos(\Omega\,t) + \frac{\dot{u}_0}{\Omega}\,sen(\Omega\,t)$$

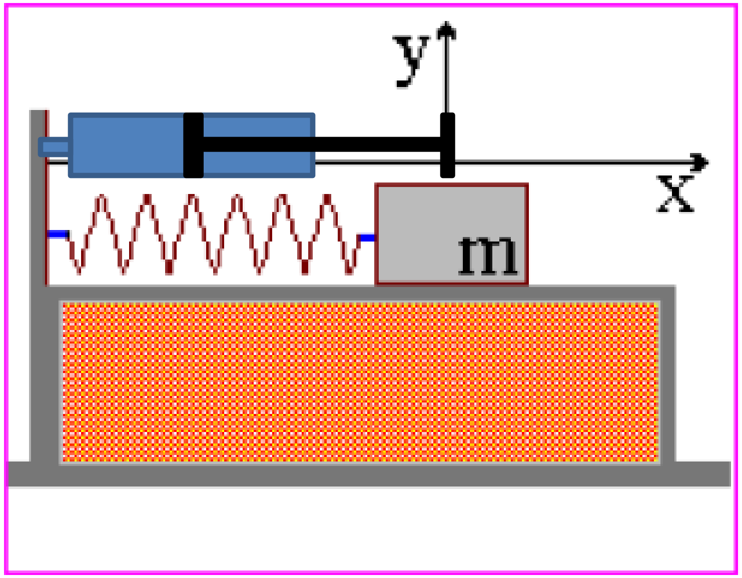
$$u(t) = B\cos(\Omega\,t + \delta)$$

Así, tenemos para la posición, la expresión

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[u_0\cos(\Omega\,t) + \frac{\dot{u}_0}{\Omega}\,sen(\Omega\,t)\right]$$

Movimiento oscilatorio amortiguado

Oscilaciones amortiguadas



La ecuación

$$\ddot{x} + k_1\, \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Se transforma en:

$$\ddot{u}(t) - \Omega'^2\, u(t) = 0$$

Cuando elegimos $\omega_0 < \alpha$, así resulta:

$$\Omega' = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad \alpha = \frac{k_1}{2}$$

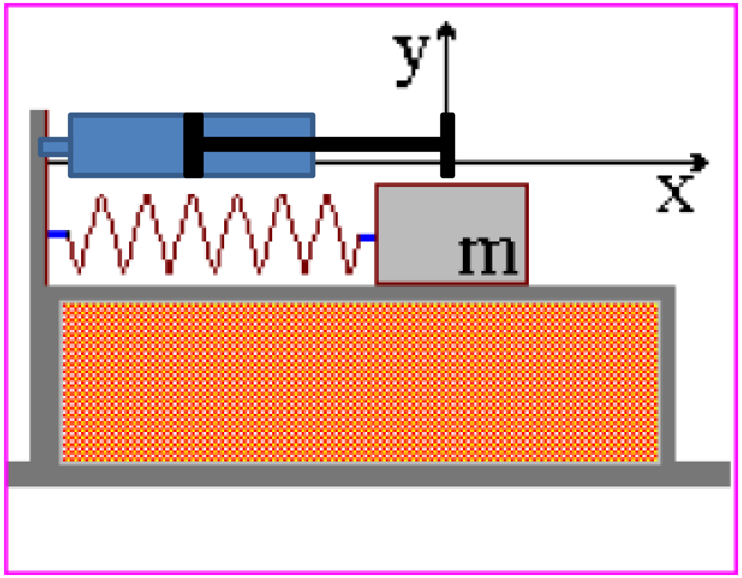
$$u(t) = Ae^{-\Omega' t} + Be^{\Omega' t}$$

Así, tenemos para la posición, la expresión

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[Ae^{-\Omega' t} + Be^{\Omega' t}\right]$$

Movimiento sobre-amortiguado

Oscilaciones amortiguadas



La ecuación

$$\ddot{x} + k_1\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Se transforma en:

$$\ddot{u}(t) = 0$$

cuando elegimos $\omega_0 = \alpha$ resulta:

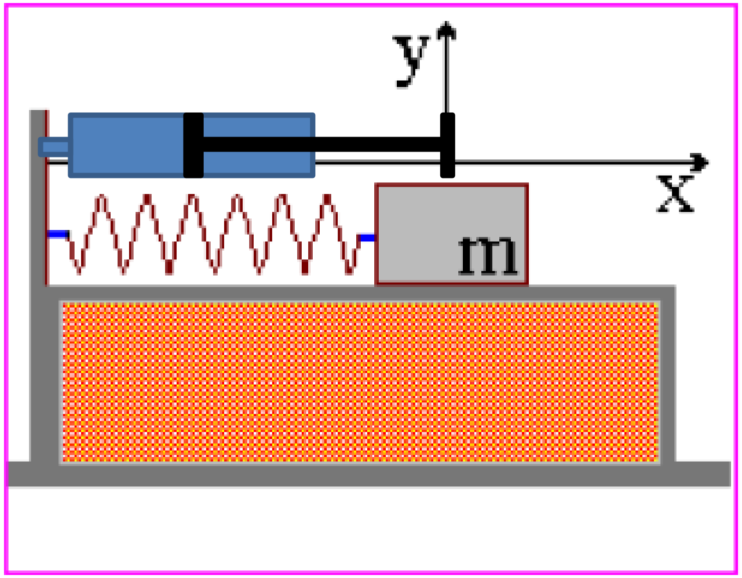
$$u(t) = A + B\,t$$

Así, tenemos para la posición, la expresión

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[A + B\,t\right]$$

Movimiento oscilatorio críticamente amortiguado

Oscilaciones amortiguadas



La ecuación

$$\ddot{x} + k_1\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Se transforma en:

$$\ddot{u}(t) = 0$$

cuando elegimos $\omega_0 = \alpha$ resulta:

$$u(t) = A + B\,t$$

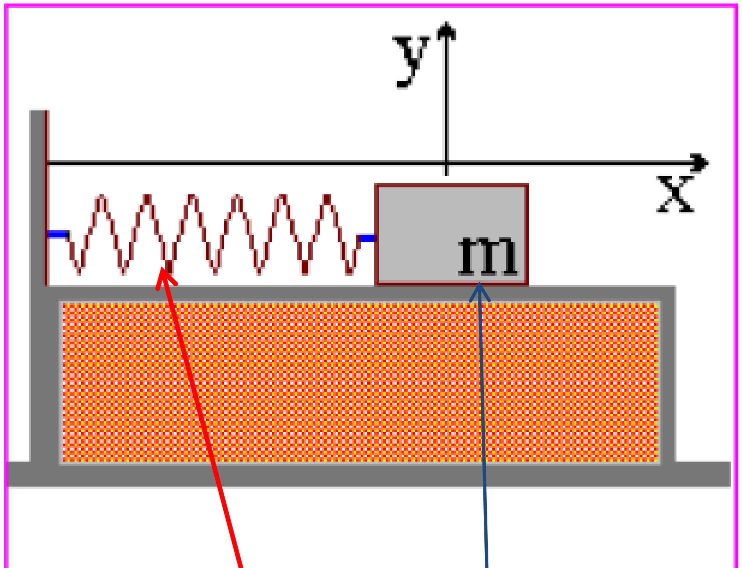
Así, tenemos para la posición, la expresión

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[A + B\,t\right]$$

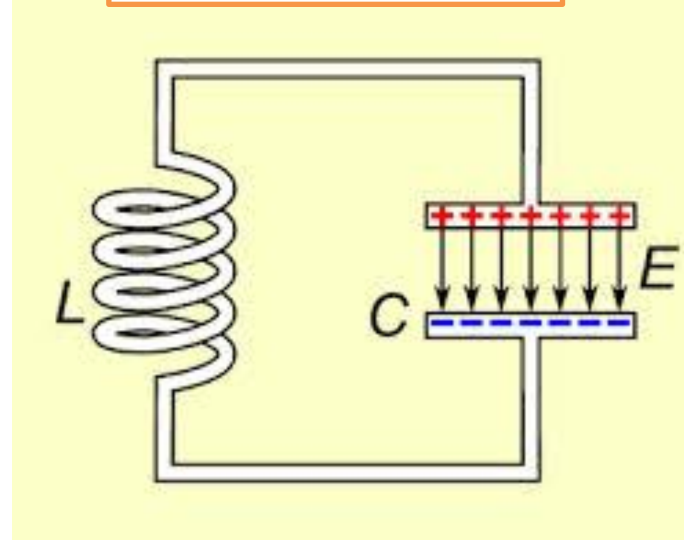
El movimiento críticamente amortiguado corresponde a la tendencia más rápida hacia la posición de equilibrio

Movimiento oscilatorio críticamente amortiguado

Oscilaciones



Circuito eléctrico



$$L\frac{d^2V(t)}{dt^2} = -\frac{1}{C}V(t)$$

$$-\mathrm{k}\,\mathrm{x} = \mathrm{m}\,\ddot{\mathrm{x}}$$

$$L\ddot{V}(t) = -\frac{1}{C}V(t)$$

$$m \Leftrightarrow L$$

$$k \Leftrightarrow \frac{1}{C}$$