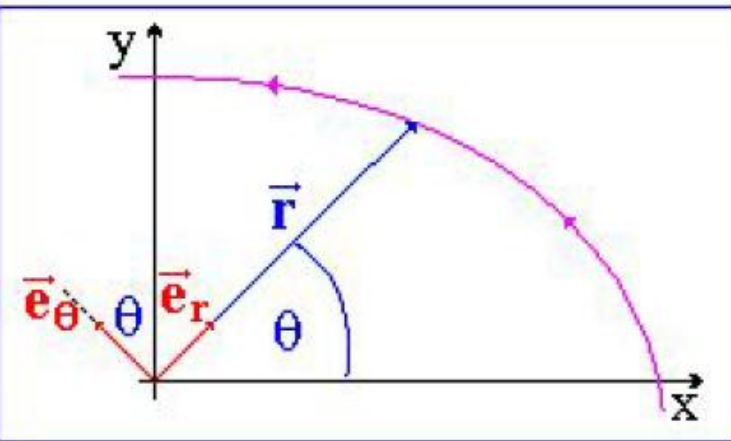


# CINEMÁTICA

## Coordenadas Polares

# Coordenadas Polares



Trayectoria plana

Posición

$$r = r(t) \quad \theta = \theta(t)$$

$$\vec{r}(t) = r(t) \vec{e}_r$$

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{i} + \text{sen } \theta \vec{j}$$

Velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t) \vec{e}_r + r(t) \dot{\vec{e}}_r$$

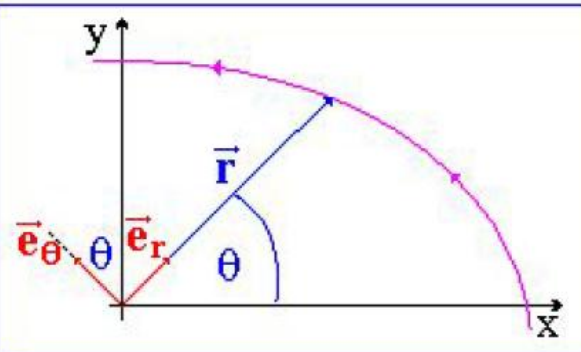
$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta} (-\text{sen } \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$$



$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t) \vec{e}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta$$

# Coordenadas Polares



Posición

$$r = r(t) \quad \theta = \theta(t)$$

$$\vec{r}(t) = r(t) \vec{e}_r$$

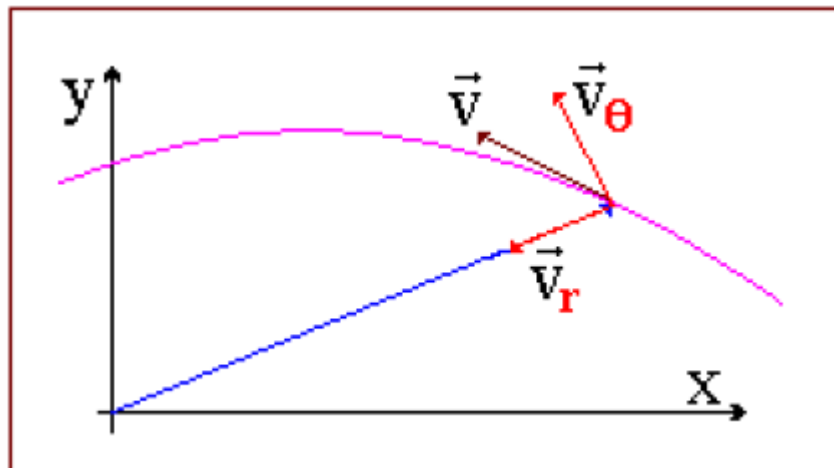
Velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t) \vec{e}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t) \vec{e}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta$$



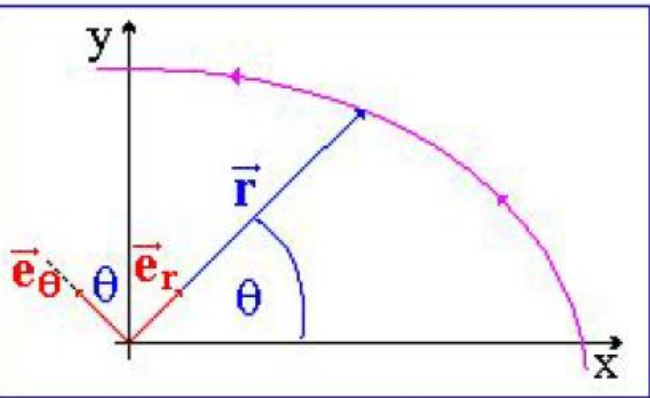
$$\vec{v}_r(t) = \dot{r}(t) \vec{e}_r$$

Componente radial

$$\vec{v}_\theta(t) = r(t) \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta$$

Componente transversal

# Coordenadas Polares



Posición

$$r = r(t) \quad \theta = \theta(t)$$

$$\vec{r}(t) = r(t) \vec{e}_r$$

Velocidad

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t) \vec{e}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta$$

Aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\vec{e}}_\theta$$

$$\vec{e}_\theta = -\text{sen } \theta \vec{i} + \text{cos } \theta \vec{j}$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} (\text{cos } \theta \vec{i} + \text{sen } \theta \vec{j}) \rightarrow \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

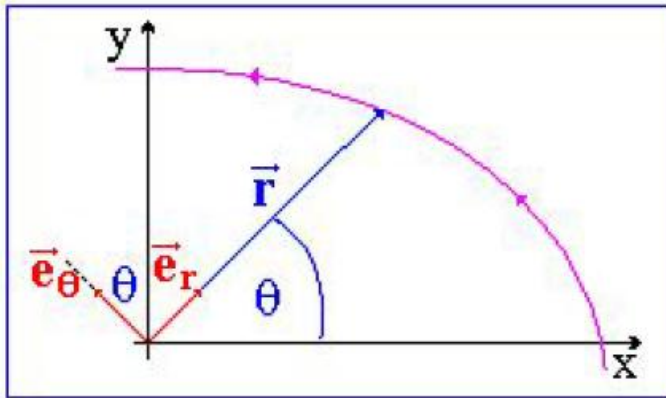
$$\vec{a}_r = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r$$

Componente radial

$$\vec{a}_\theta = (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

Componente transversal

# Coordenadas Polares



Posición

$$\mathbf{r} = r(t) \quad \theta = \theta(t)$$

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = r(t) \vec{\mathbf{e}}_r$$

Velocidad

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \dot{r}(t) \vec{\mathbf{e}}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{\mathbf{e}}_\theta$$

Vector Velocidad Angular

Introducimos el siguiente producto vectorial

$$\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} = r^2 \dot{\theta} (\vec{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{e}}_\theta)$$

El cual depende del producto vectorial entre los versores directores de las coordenadas polares:

$$\vec{\mathbf{e}}_w = \vec{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{e}}_\theta$$

Con el cual podemos expresar la primer expresión como sigue:

$$\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} = r^2 \dot{\theta} \vec{\mathbf{e}}_w$$

A partir de estas relaciones podemos definir a la velocidad angular como:

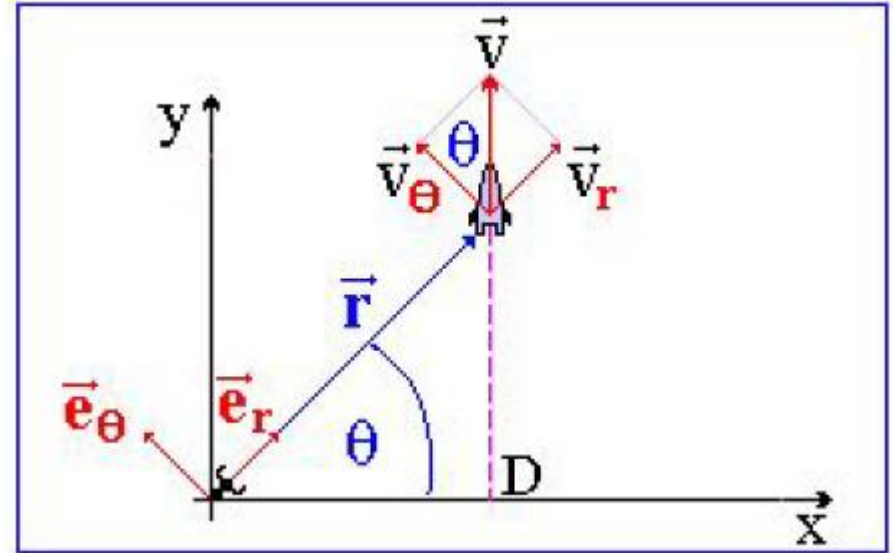
$$\vec{\mathbf{w}} = \dot{\theta} \vec{\mathbf{e}}_w \quad \text{o bien}$$

$$\vec{\mathbf{w}} = \frac{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}}{r^2}$$

# Coordenadas Polares: Ejemplo

Consideremos un cohete que asciende con velocidad constante. Éste, es seguido desde una estación de radar.

- Determine la componente radial de la velocidad y
- La variación temporal del ángulo  $\theta$ .



$$v_r = v \operatorname{sen} \theta$$

$$\dot{\theta} = \boxed{v} \operatorname{sen} \theta$$

constante

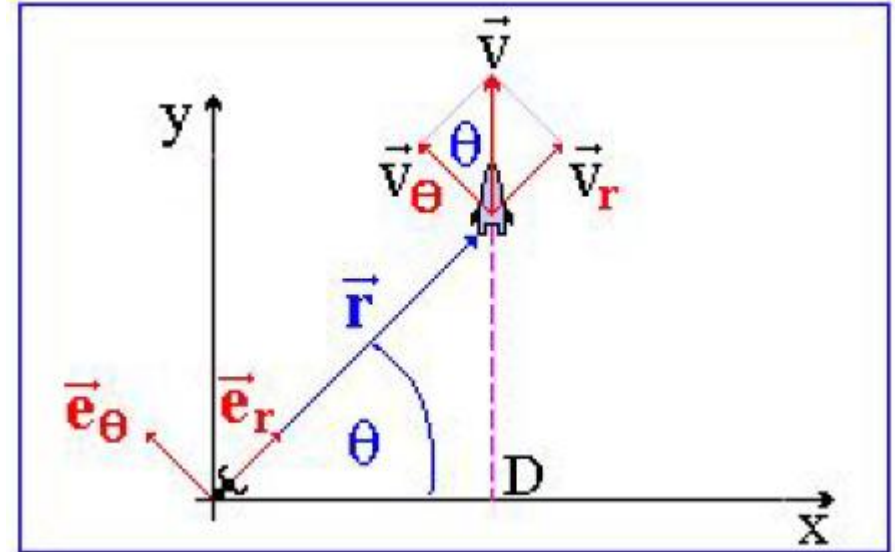
$$\dot{\theta} = v \frac{y(t)}{r(t)}$$

$$\dot{\theta} = \frac{v^2 t}{\sqrt{D^2 + v^2 t^2}}$$

# Coordenadas Polares: Ejemplo

Consideremos un cohete que asciende con velocidad constante. Éste, es seguido desde una estación de radar.

- Determine la componente radial de la velocidad y
- La variación temporal del ángulo  $\theta$ .



a)

$$v_r = v \operatorname{sen} \theta$$

$$\dot{\theta} = \boxed{v} \operatorname{sen} \theta$$

constante

$$\dot{\theta} = v \frac{y(t)}{r(t)}$$

$$\dot{\theta} = \frac{v^2 t}{\sqrt{D^2 + v^2 t^2}}$$

$$t \rightarrow \infty$$

$$\dot{\theta} \rightarrow v$$

# Coordenadas Polares: Ejemplo

Consideremos un cohete que asciende con velocidad constante. Éste, es seguido desde una estación de radar.

- Determine la componente radial de la velocidad y
- La variación temporal del ángulo  $\theta$ .

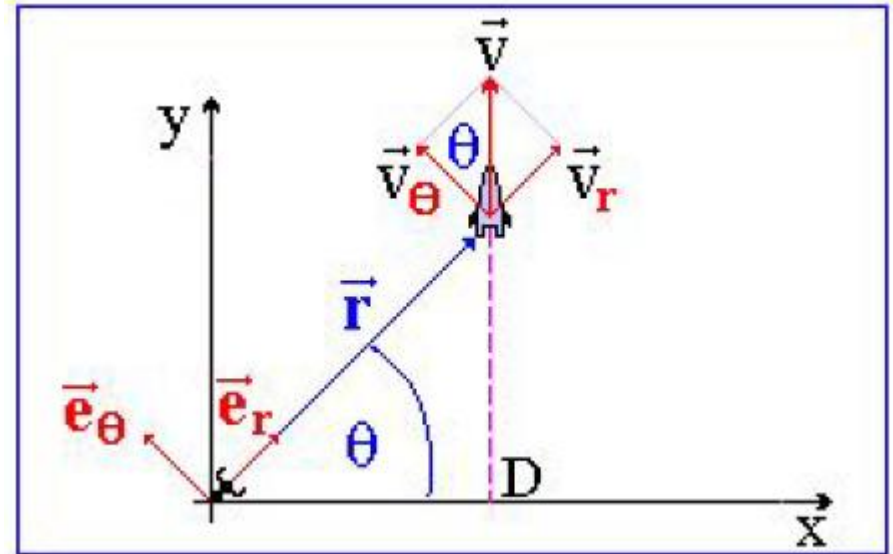
a)

$$v_{\theta} = v \cos \theta \quad r \dot{\theta} = v \cos \theta$$

$$\dot{\theta} = v \frac{D}{r^2} \quad \dot{\theta} = v \frac{D}{D^2 + v^2 t^2}$$

$$t \rightarrow \infty$$

$$\dot{\theta} \rightarrow 0$$





# Coordenadas Polares: Ejemplo

Consideremos un cohete que asciende con velocidad constante. Éste, es seguido desde una estación de radar.

- Determine la componente radial de la velocidad y
- La variación temporal del ángulo  $\theta$ .

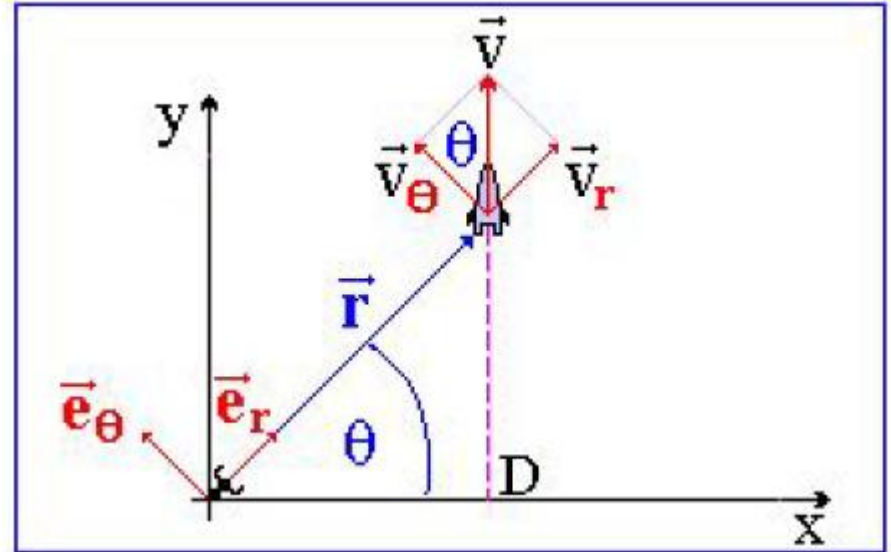
b)

$$v_{\theta} = v \cos \theta$$

$$r \dot{\theta} = v \cos \theta$$

$$\dot{\theta} = v \frac{D}{r^2}$$

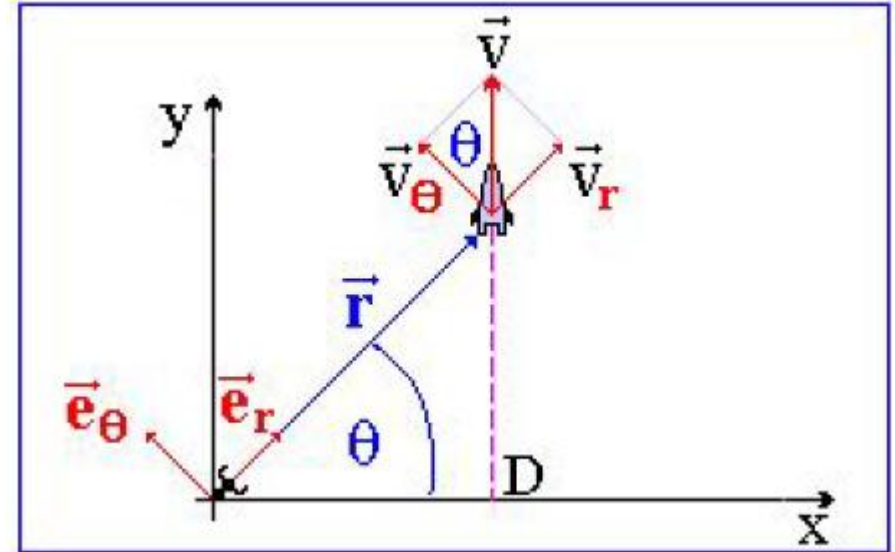
$$\dot{\theta} = v \frac{D}{D^2 + v^2 t^2}$$



# Coordenadas Polares: Ejemplo

Consideremos un cohete que asciende con velocidad constante. Éste, es seguido desde una estación de radar.

- Determine la componente radial de la velocidad y
- La variación temporal del ángulo  $\theta$ .



b)

$$v_{\theta} = v \cos \theta \quad r \dot{\theta} = v \cos \theta$$

$$\dot{\theta} = v \frac{D}{r^2}$$

$$\dot{\theta} = v \frac{D}{D^2 + v^2 t^2}$$

$$t \rightarrow \infty$$

$$\dot{\theta} \rightarrow 0$$