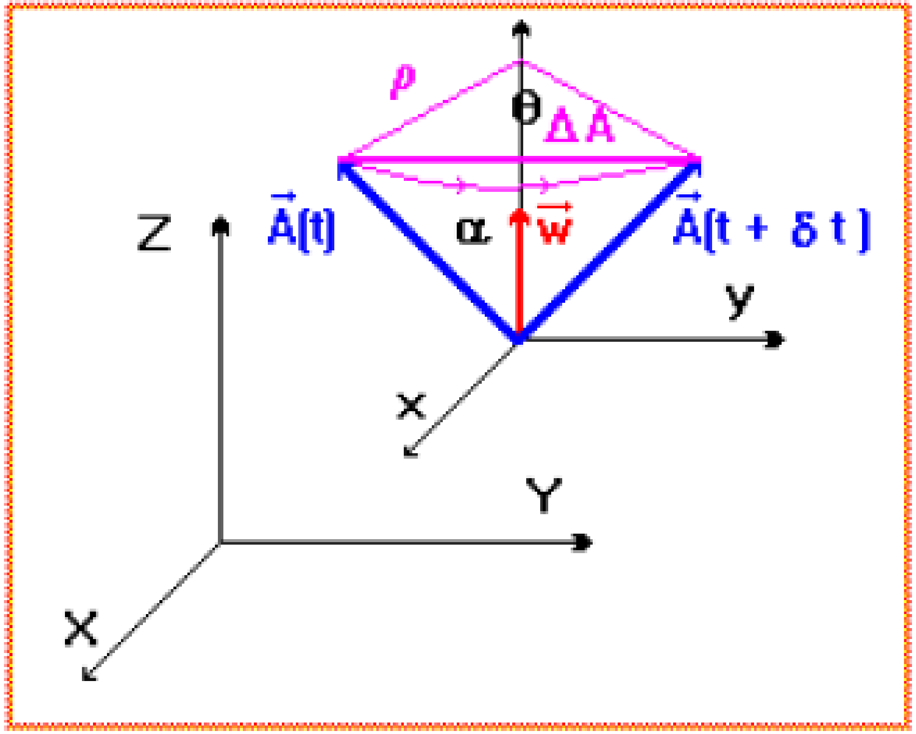
Sistemas de referencia acelerados



Supongamos que tenemos un sistema de referencia que esta rotando con una velocidad angular **w**. Y supongamos que observamos un vector A cuyas componentes varían en el tiempo respecto de dicho sistema.

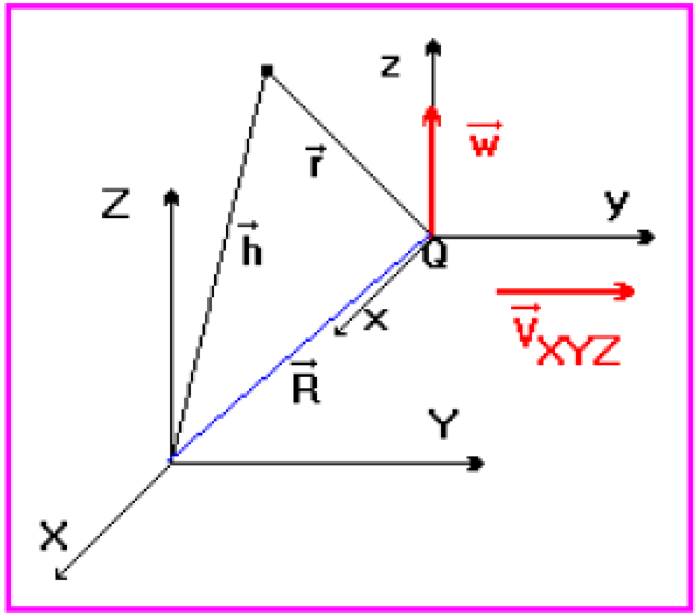
La velocidad de una partícula vista desde el sistema principal XYZ, estará dada por:

$$\dot{\vec{A}}\Big|_{XYZ} = \dot{\vec{A}}\Big|_{xyz} + \vec{w} \times \vec{A}$$

El primer termino a la derecha corresponde a la velocidad del punto observado respecto del sistema en rotación. El segundo termino esta asociado pura y exclusivamente al hecho de que el sistema esta rotando.

La suma representa la velocidad del punto visto desde el sistema principal.

Sistemas de referencia acelerados



Consideremos el movimiento de una partícula de masa m vista desde el sistema principal y expresada en términos de las magnitudes medidas también respecto del sistema en movimiento (en rotación) .

La posición de la partícula es:

$$\vec{h} = \vec{R} + \vec{r}$$

La velocidad de la misma será:

$$\vec{v}_{XYZ} = \vec{v}_{xyz} + \vec{V}_{XYZ} + \vec{w} \times \vec{r}$$

Derivando respecto del tiempo, obtenemos la aceleración:

$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{a}_{xyz} + \vec{A}_{XYZ} + \vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r} + 2\vec{w} \times \vec{v}_{xyz} + \dot{\vec{w}} \times \vec{r}$$

Ecuación de movimiento para un observador no inercial

La segunda ley de Newton aplicada a una partícula vista desde el sistema principal (XYZ) resulta ser:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_{XYZ}}$$

Vinculando esta con las magnitudes vistas desde el sistema en movimiento (xyz) resulta:

$$\vec{F} = m\vec{a}_{xyz} + m\vec{A}_{XYZ} + m\vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r} + 2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz} + m\dot{\vec{w}} \times \vec{r}$$

La cual puede expresarse como

$$\boxed{\vec{F} + (-m\vec{A}_{XYZ}) + (-m\vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r}) + (-2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}) + (-m\dot{\vec{w}} \times \vec{r}) = m\vec{a}_{xyz}}$$

Ecuación de movimiento para un observador no inercial

Introduciendo las siguientes "Fuerzas no-inerciales"

De Traslación	Centrífuga	De Coriolis	De Euler
$f_t = -m\vec{A}_{XYZ}$	$f_{cf} = -m\vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r}$	$f_c = -2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}$	$f_e = -m\dot{\vec{w}} \times \vec{r}$

resulta

$$\vec{F} + \vec{f}_t + \vec{f}_{cf} + \vec{f}_c + \vec{f}_e = m\vec{a}_{xyz}$$

La cual corresponde a la **ecuación de movimiento para un observador no inercial**
Si definimos la resultante de las fuerzas inerciales como:

$$\vec{f} = \vec{f}_t + \vec{f}_{cf} + \vec{f}_c + \vec{f}_e$$

En forma compacta la ecuacion de movimientos resulta:

$$\vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}_{xyz}$$

La Tierra como un sistema no inercial

Suponiendo que consideramos al **Sol** como **sistema de referencia inercial**, a la **Tierra** como **sistema no inercial**, la ecuación de Newton para una partícula resulta ser

$$\vec{F} = m\vec{a}_{xyz} + m\vec{A}_{XYZ} + m\vec{w}\times\vec{w}\times\vec{r} + 2m\vec{w}\times\vec{v}_{xyz} + m\dot{\vec{w}}\times\vec{r}$$

$\vec{A}_{XYZ}$	aceleración del centro de la Tierra respecto al Sol (movimiento orbital).

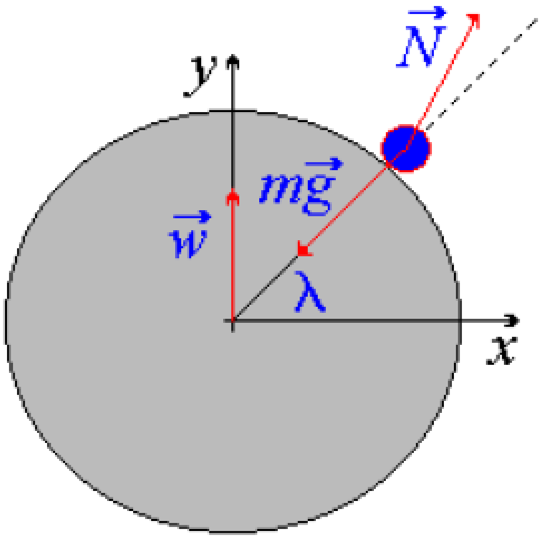
$\dot{\vec{w}}$	Aceleración angular de la Tierra respecto del Sol. Esta es pequeña, pero no nula. 1) El eje de rotación de la Tierra no coincide con el eje geográfico. 2) Las mareas producen pequeños cambios.

Si despreciamos los términos asociados al movimiento de la Tierra respecto del Sol tendremos

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_{xyz} + m\vec{w}\times\vec{w}\times\vec{r} + 2m\vec{w}\times\vec{v}_{xyz}}$$

La Tierra como un sistema no inercial

Variación del peso con la Latitud



Teniendo en cuenta que el cuerpo esta en reposo respecto del sistema de referencia fijo a Tierra, resulta

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r}$$

O, equivalentemente

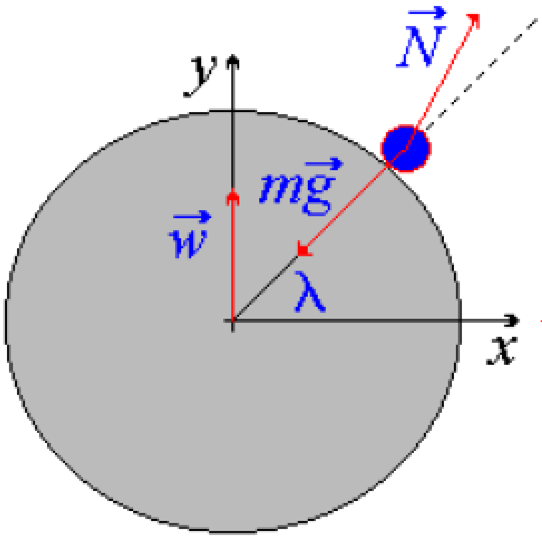
$$\vec{N} = -m\vec{g} + m\vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r}$$

Evaluando las componentes de los vectores que aparecen a la derecha de la ecuación a lo largo de las direcciones definidas en el gráfico, resulta:

$$\vec{N} = mg\left[\cos(\lambda)\,\vec{i} + \operatorname{sen}(\lambda)\,\vec{j}\right] - mw^2 R\cos(\lambda)\,\vec{i}$$

La Tierra como un sistema no inercial

Variación del peso con la Latitud



Agrupando términos resulta:

$$\vec{N} = mg\left(1 - \frac{w^2 R}{g}\right)\cos(\lambda)\,\vec{i} + mg\,\mathrm{sen}(\lambda)\,\vec{j}$$

Plano del ecuador (λ=0)

$$N = mg - mw^2 R$$

En los polos (λ=90)

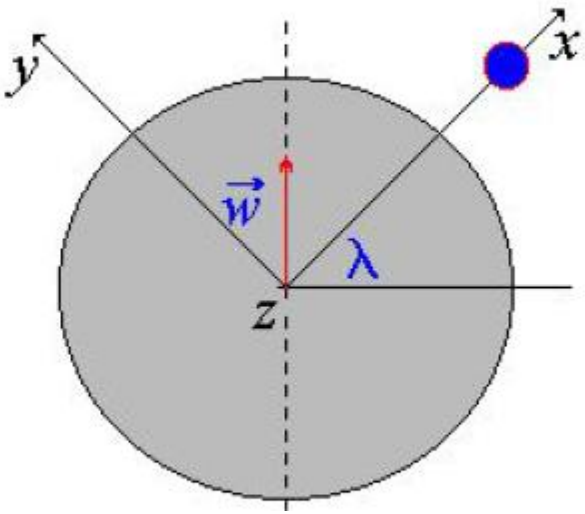
$$N = mg$$

El peso aparente del cuerpo en función de la Latitud es

$$N = mg\left[\varepsilon^2 \cos^2(\lambda) + \mathrm{sen}^2(\lambda)\right]^{1/2} \qquad \varepsilon = \left(1 - \frac{w^2 R}{g}\right)$$

La Tierra como un sistema no inercial

Desviación de Coriolis



Consideremos el caso de un cuerpo que se deja caer Desde una altura H de la superficie de la Tierra, la ecuación de movimiento, desde el sistema no inercial fijo a Tierra, resulta ser:

$$m\vec{g} = m\vec{a}_{xyz} + m\vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r} + 2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}$$

Consideremos el caso de un cuerpo que se deja caer desde una altura H de la superficie de la Tierra, la ecuación de movimiento, desde el sistema no inercial fijo a Tierra, resulta ser:

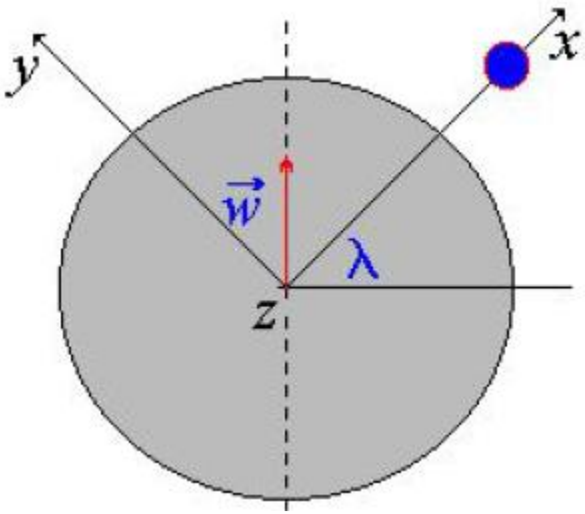
$$m\vec{g} = m\vec{a}_{xyz} + 2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}$$

o, alternativamente

$$m\vec{a}_{xyz} = m\vec{g} - 2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}$$

La Tierra como un sistema no inercial

Desviación de Coriolis



$$m\vec{a}_{xyz} = m\vec{g} - 2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}$$

Evaluando en las distintas componentes resulta

$$\ddot{x} = -g - 2w\dot{z}\cos\lambda$$
$$\ddot{y} = 2w\dot{z}\,\mathrm{sen}\,\lambda$$
$$\ddot{z} = 2w\dot{x}\cos\lambda - 2w\dot{y}\,\mathrm{sen}\,\lambda$$

Trabajando con la primera resulta

$$d\dot{x} = -g\,dt - 2w\cos\lambda\,dz$$

La cual lleva a:

$$\dot{x} = -g\,t - 2wz\cos\lambda$$

De manera similar tenemos para la componente en *y*

$$\dot{y} = 2wz\,\mathrm{sen}\,\lambda$$

$$\ddot{z} = 2wgt\cos\lambda - 4w^2 z$$

La Tierra como un sistema no inercial

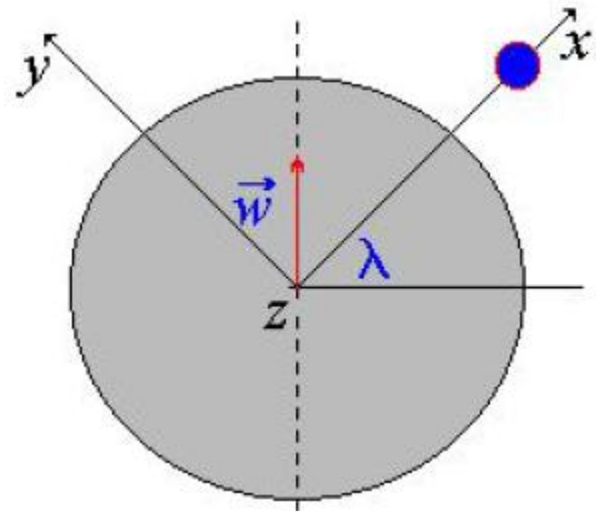
Desviación de Coriolis

$$m\vec{a}_{xyz} = m\vec{g} - 2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}$$

$$\ddot{x} = -g - 2w\dot{z}\cos\lambda$$

$$\ddot{y} = 2w\dot{z}\,\mathrm{sen}\,\lambda$$

$$\ddot{z} = 2w\dot{x}\cos\lambda - 2w\dot{y}\,\mathrm{sen}\,\lambda$$



Utilizando las dos componentes halladas en la componente z resulta:

$$\ddot{z} = 2wgt\cos\lambda - 4w^2z$$

y, despreciando el termino cuadrático.

$$\ddot{z} = 2wgt\cos\lambda$$

Integrando una vez en el tiempo resulta

$$\dot{z} = -wgt^2\cos\lambda$$

Integrando nuevamente

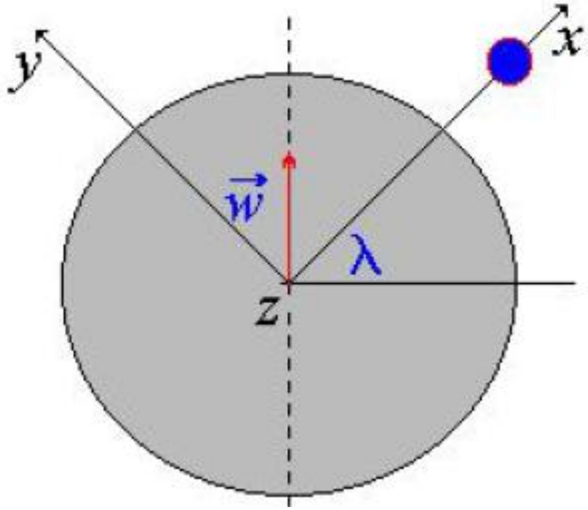
$$z = -\tfrac{1}{3}wgt^3\cos\lambda$$

La Tierra como un sistema no inercial

Desviación de Coriolis

$$m\vec{a}_{xyz} = m\vec{g} - 2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}$$

$$\boxed{z = -\tfrac{1}{3} w g t^3 \cos\lambda}$$



La desviación en **es el sentido de rotación de la Tierra**

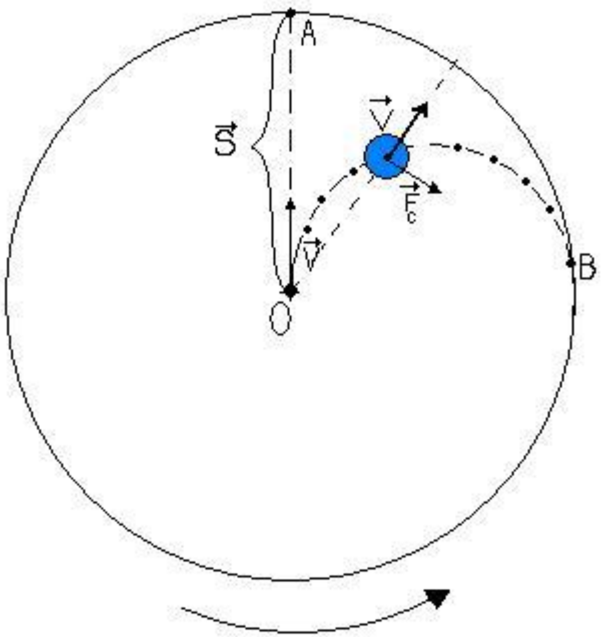
La desviación es **nula en los polos**

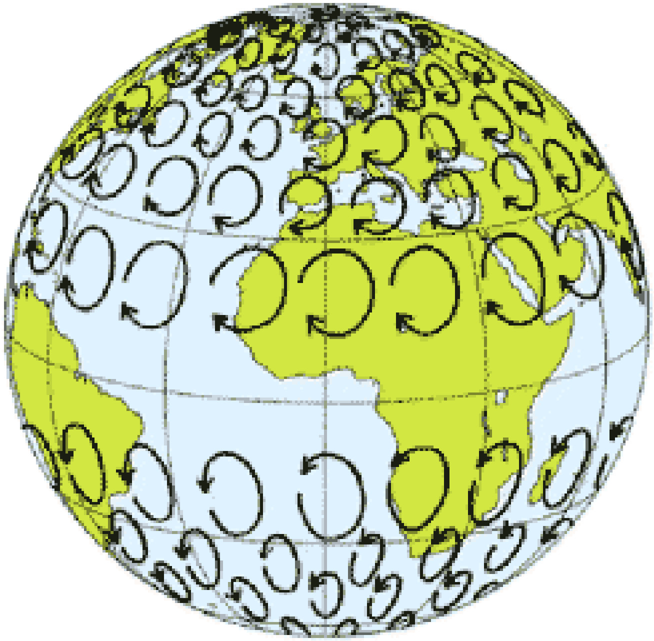
La desviación es **máxima en el ecuador**

La Tierra como un sistema no inercial

Desviación de Coriolis

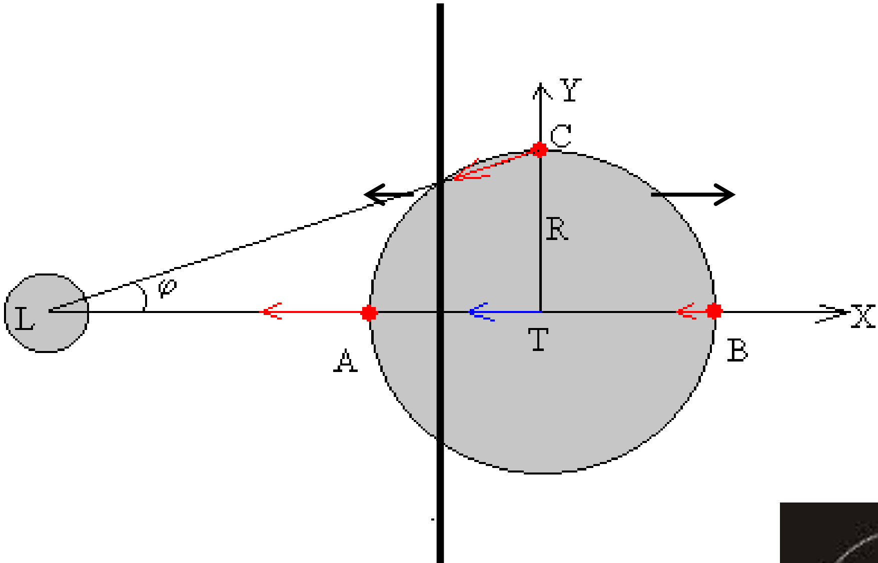
$$m\vec{a}_{xyz} = m\vec{g} - 2m\vec{w} \times \vec{v}_{xyz}$$

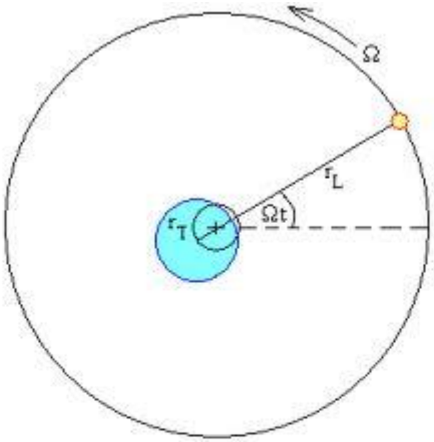


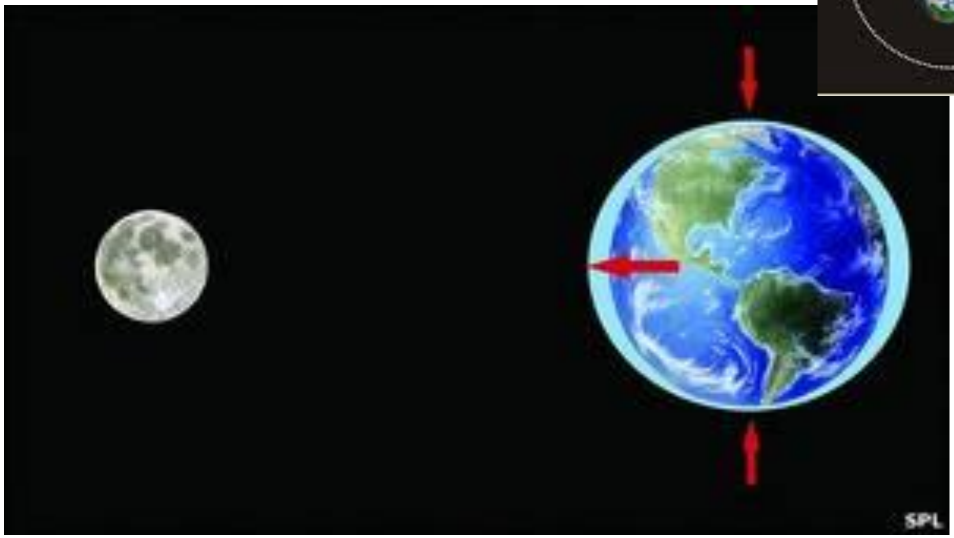


Gaspard Gustav Coriolis. El fue un matemático e ingeniero francés que en 1835 expresó que todo sistema en rotación ejerce sobre cualquier objeto que se desplace sobre él una fuerza perpendicular a la dirección de su movimiento torciendo su trayectoria.

La Tierra como un sistema no inercial







La Tierra como un sistema no inercial

Disipación

• Las mareas introducen disipación (en promedio 3.75 teraWatt)

• Las mareas crean un torque sobre la Luna y esto es transferido al momento angular de la Luna en su orbita y así aumenta la distancia Tierra-Luna.

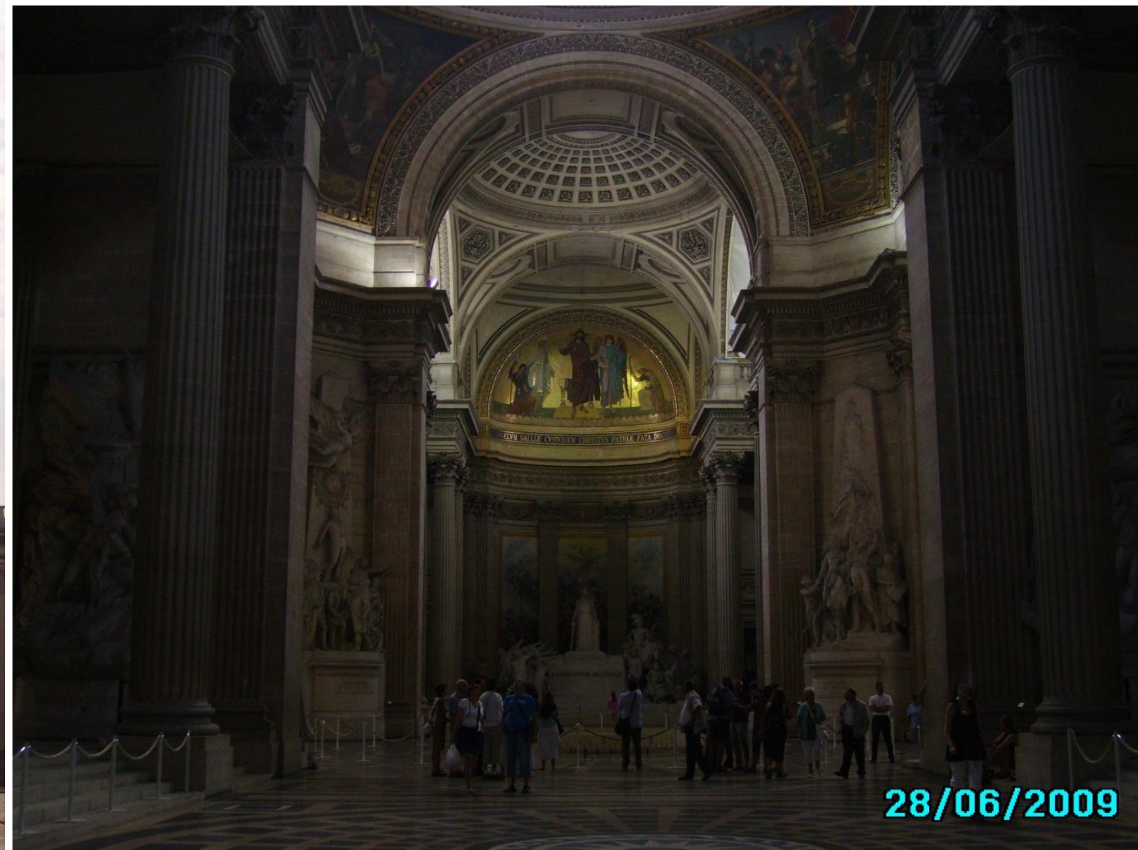
•De la misma manera y por la misma razón la velocidad de rotación de la Tierra disminuye

• La distancia Tierra-Luna cambia en unos 3.8 centimetros /año.

• La longitud de los días se ha incrementado en algo así como 2 horas en los últimos 600 millones de años.

• Una aproximación cruda nos diria que 70 millones de años atras la longitud del día era un 1% mas corto y asi el año tenia unos 4 días mas.

Panthéon, Paris




AUX GRANDS HOMMES LA PATRIE RECONNAISSAN
28/06/2009

La Tierra como un sistema no inercial

Las estaciones en la Tierra