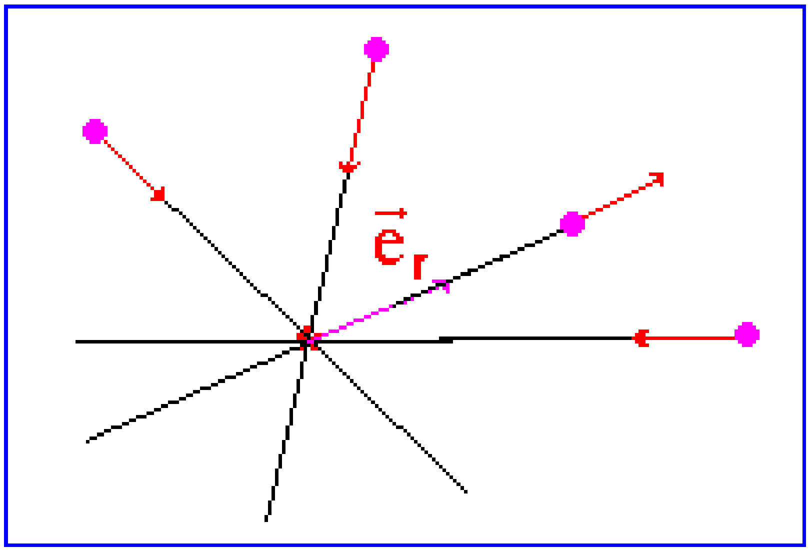
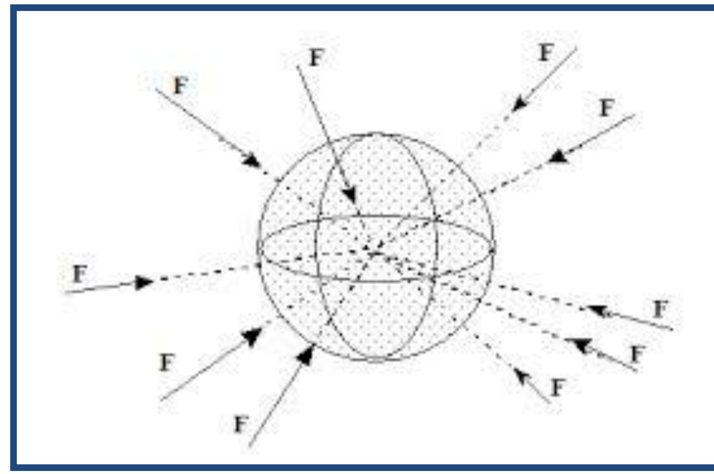
Trabajo Mecánico, campos esféricamente simétricos

Campo radial y esféricamente simétrico





$$\vec{F} = f(r)\,\vec{e}_r$$

La recta de acción esta siempre a lo largo de la línea que une el punto con el centro de fuerzas.

El módulo de la fuerza depende sólo de la distancia entre el punto y el centro de fuerzas: f(r).

Trabajo Mecánico: fuerza gravitatoria

Definimos la fuerza

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{e}_r$$

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -G\,\frac{mM}{r^2}\,\vec{e}_r}$$

Definimos el desplazamiento

$$d\vec{r} = \vec{v}dt$$

$$d\vec{r} = (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)\,dt$$

$$d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = f(r)\,dr$$

$$W = \int_{r_A}^{r_B} f(r)\,dr$$

$$\boxed{W = -\int_{r_A}^{r_B} G\,\frac{mM}{r^2}\,dr}$$

$$W = -GmM\left[\left(-\frac{1}{r_B}\right)-\left(-\frac{1}{r_A}\right)\right]$$

Trabajo Mecánico: fuerza elástica

Definimos la fuerza

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{e}_r$$

$$\boxed{\vec{F}(r) = -k\,r\,\vec{e}_r}$$

Definimos el desplazamiento

$$d\vec{r} = \vec{v}dt$$

$$d\vec{r} = (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)\,dt$$

$$d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + r d\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = f(r)\,dr$$

$$W = \int_{r_A}^{r_B} f(r)\,dr \quad \Longrightarrow \quad \boxed{W = -\int_{r_A}^{r_B} k\,r\,dr}$$

$$\boxed{W = -\frac{1}{2}k\left(r_B^2 - r_A^2\right)}$$

Función energía potencial

Fuerza gravitatoria

$$W = -GmM\left[\left(-\frac{1}{r_B}\right)-\left(-\frac{1}{r_A}\right)\right]$$

Si definimos la función energía potencial como:

$$\Phi(r) = -G\,\frac{mM}{r}$$

El trabajo resulta:

$$W = -\left[\Phi(r_B) - \Phi(r_A)\right]$$

Fuerza elástica

$$W = -\frac{1}{2}k\left(r_B^2 - r_A^2\right)$$

Definiendo la función energía potencial:

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}k\,r^2$$

El trabajo resulta:

$$W = -\left[\Phi(r_B) - \Phi(r_A)\right]$$

Función energía potencial

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\left[\Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a)\right]$$

$$\bar{\Phi} = \Phi(\vec{r})$$

Función energía potencial

Campo de fuerzas conservativo

$$\Phi_g(r) = -G\frac{mM}{r}$$

Potencial gravitatorio

$$\Phi_e(r) = \frac{1}{2}k\,r^2$$

Potencial elástico

Función energía potencial

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\left[\Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a)\right]$$

$$\Phi = \Phi(\vec{r})$$

Función energía potencial

Campo de fuerzas conservativo

Potencial para un resorte

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k(r - r_\circ)\,\vec{e}_r$$

$$\Phi_m(r) = \frac{1}{2}k(r - r_\circ)^2$$

$$\Phi_m(r) = \frac{1}{2}k\delta^2$$

Potencial gravitatorio sobre la superficie de la Tierra

$$\vec{F}(\vec{r}) = -mg\,\vec{j}$$

$$\Phi_{gc}(r) = mgy$$

Función energía potencial

$$\Phi_g(r) = -G\frac{mM}{r} + cte$$

cte=0 en r infinito

$$\Phi_e(r) = \frac{1}{2}kr^2 + cte$$

cte=0 en r cero

$$\Phi_m(r) = \frac{1}{2}k(r - r_o)^2 + cte$$

cte=0 en la posición de equilibrio del resorte

$$\Phi_{gc}(r) = mgy + cte$$

cte=0 en *y=0*

Función energía potencial

Potencial gravitatorio → $$\Phi_g(r) = -G\frac{mM}{r}$$

Potencial elástico → $$\Phi_e(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

Potencial para un resorte → $$\Phi_m(r) = \frac{1}{2}k(r - r_\circ)^2$$

Potencial gravitatorio sobre la superficie de la Tierra → $$\Phi_{gc}(r) = mgy$$

Función energía potencial

¿Que pasa si el trabajo se realiza a lo largo de una trayectoria cerrada?

Función energía potencial

¿Que pasa si el trabajo se realiza a lo largo de una trayectoria cerrada?

Si la fuerza es de tipo conservativo:

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\left[\Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a)\right]$$

Función energía potencial

¿Que pasa si el trabajo se realiza a lo largo de una trayectoria cerrada?

Si la fuerza es de tipo conservativo:

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\left[\Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a)\right]$$

Entonces el trabajo será nulo

$$\oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

Función energía potencial

Partiendo de la definición de trabajo y en el caso de considerar fuerzas de tipo conservativo tenemos:

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\left[\Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a)\right]$$

Función energía potencial

Partiendo de la definición de trabajo y en el caso de considerar fuerzas de tipo conservativo tenemos:

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\left[\Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a)\right]$$

Lo cual tiene implícito lo siguiente:

$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -d\Phi$$

Para fuerzas radiales y esféricamente simétricas es:

$$f(r)\ dr = -d\Phi$$

Equivalentemente, podemos escribir:

$$\boxed{f(r) = -\frac{d\Phi}{dr}}$$

Función energía potencial

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\left[\Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a)\right] \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -d\Phi$$

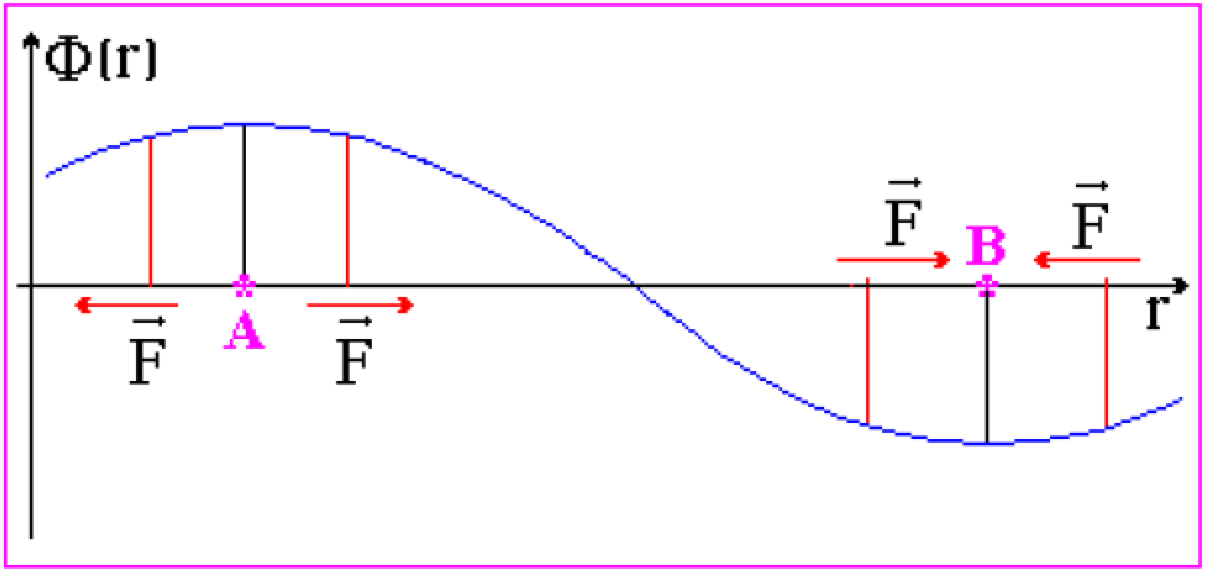
$$\boxed{d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz} \Rightarrow \boxed{\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz}$$

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}}$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla \Phi}$$

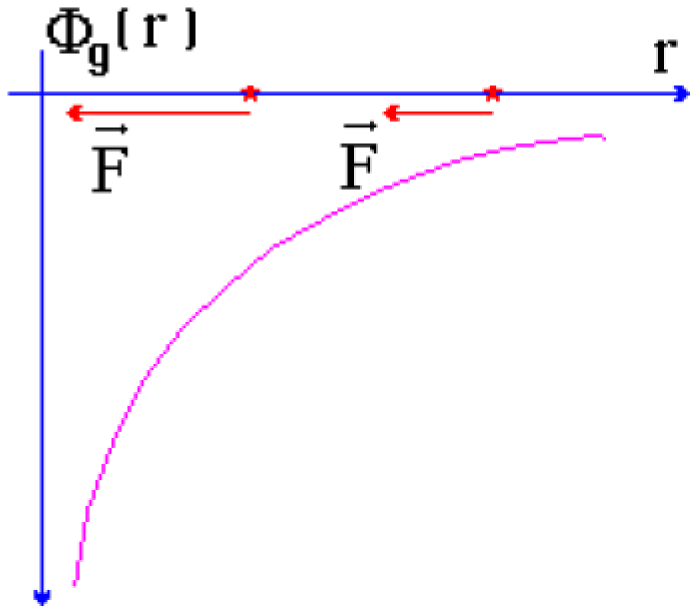
Función energía potencial



Función energía potencial

Potencial gravitatorio

$$\Phi_g(r) = -G\,\frac{mM}{r}$$



Función energía potencial

Potencial para un resorte

$$\Phi_m = \frac{1}{2} k \, \delta^2$$