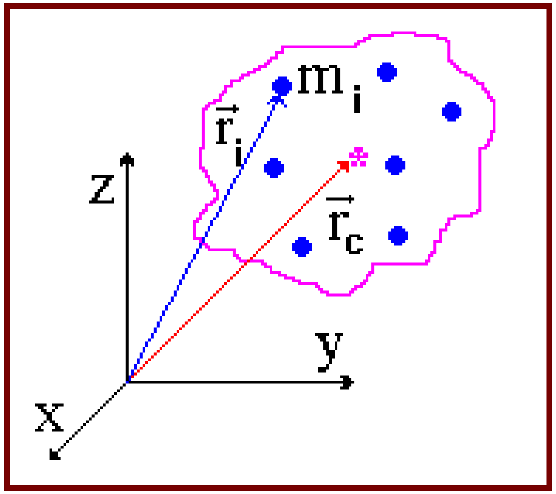
Sistema de partículas

Trabajo Mecánico



Como hemos estado haciendo anteriormente, definimos el trabajo de un sistema de partículas como la suma de los trabajos sobre cada una de ellas:

$$W = \sum W_i$$

Usando el teorema de las fuerzas vivas, podemos reescribir la expresión anterior como sigue:

$$W = \sum \Delta T_i \qquad \text{con} \qquad T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

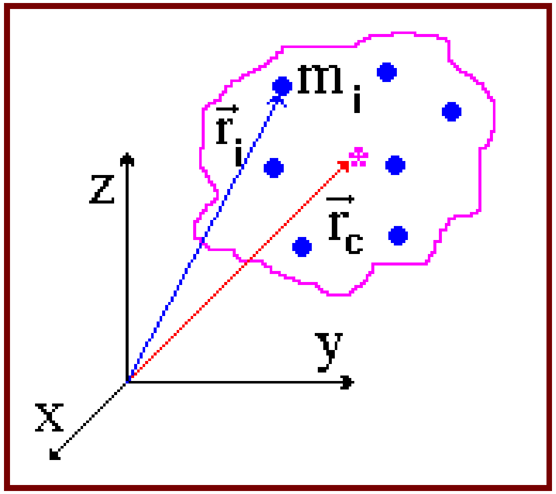
$$W = \Delta \sum T_i \quad \Longrightarrow \quad W = \Delta T_{or} + \Delta T'$$

Sistema de partículas

Trabajo Mecánico

Por otro lado, podemos usar la definición formal para el trabajo:

$$W = \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i$$



En la cual esta consideradas las fuerzas externas y las internas.
Haciendo uso de las relaciones

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i'$$

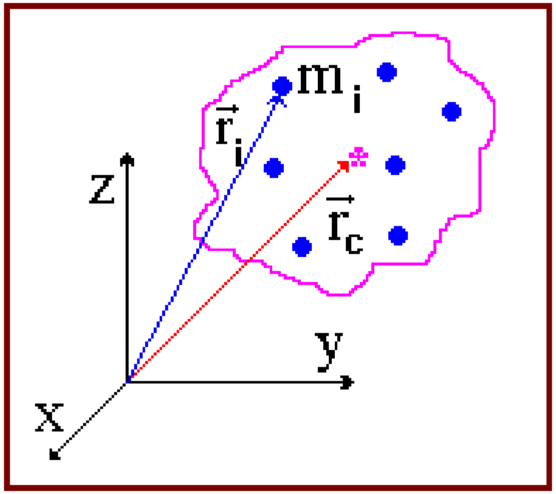
$$W = \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot (d\vec{r}_c + d\vec{r}_i')$$

o bien, separando las contribuciones

$$W = \sum \int (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_c + \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i'$$

Sistema de partículas

Trabajo Mecánico



Volviendo a la expresión

$$W = \sum \int (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_c + \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i'$$

Podemos notar, que en el primer termino, la integración es sobre la trayectoria del centro de masa. Razón por la cual podemos reescribir la expresión como sigue:

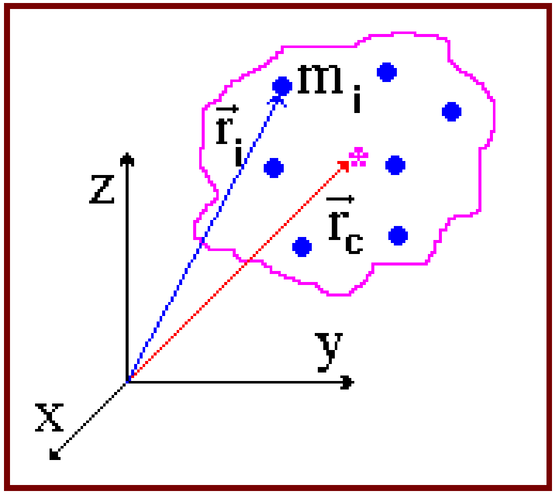
$$W = \int \left[\sum (\vec{F}_i + \vec{f}_i)\right] \cdot d\vec{r}_c + \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i'$$

Que puede separarse aún más:

$$W = \int \left[\sum \vec{F}_i\right] \cdot d\vec{r}_c + \int \left[\sum \vec{f}_i\right] \cdot d\vec{r}_c + \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i'$$

Sistema de partículas

Trabajo Mecánico



Volviendo a la expresión

$$W = \sum \int (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_c + \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i'$$

Podemos notar, que en el primer termino, la integración es sobre la trayectoria del centro de masa. Razón por la cual podemos reescribir la expresión como sigue:

$$W = \int \left[\sum (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \right] \cdot d\vec{r}_c + \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i'$$

Que puede separarse aún más:

$$W = \int \left[\sum \vec{F}_i \right] \cdot d\vec{r}_c + \int \left[\sum \vec{f}_i \right] \cdot d\vec{r}_c + \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i'$$

Teniendo en cuenta el principio de acción y reacción tendremos

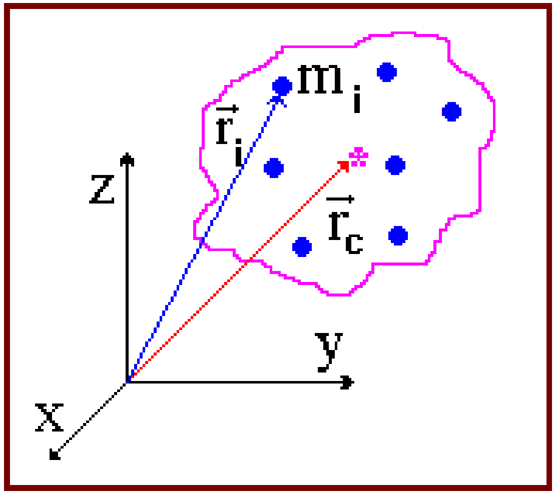
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c + \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i'$$

Sistema de partículas

Trabajo Mecánico

Analicemos el primero de los términos

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c$$

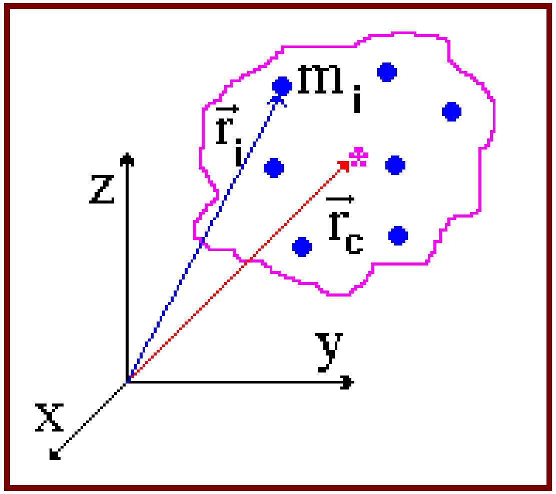


Sistema de partículas

Trabajo Mecánico

Analicemos el primero de los términos

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c$$



Si establecemos la conexión a través de la segunda ley Newton entre la fuerza y la aceleración, resulta

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \int m\vec{a}_c \cdot d\vec{r}_c$$ o bien $$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \int m \frac{d\vec{v}_c}{dt} \cdot d\vec{r}_c$$

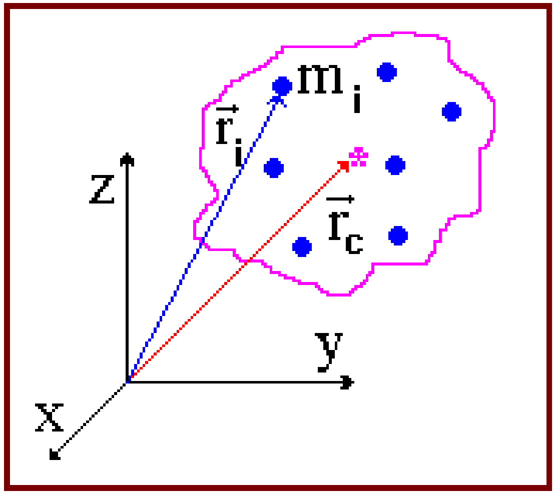
Sistema de partículas

Trabajo Mecánico

Analicemos el primero de los términos

$$\boxed{\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c}$$

Si establecemos la conexión a través de la segunda ley Newton entre la fuerza y la aceleración, resulta



$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \int m\vec{a}_c \cdot d\vec{r}_c$$

o bien

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \int m \frac{d\vec{v}_c}{dt} \cdot d\vec{r}_c$$

Haciendo algunos “pases” matemáticos….

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \int m\vec{v}_c \cdot d\vec{v}_c \quad \Rightarrow \quad \int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \frac{1}{2} m \int dv^2$$

La cual se integra fácilmente,

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \Delta(\frac{1}{2} mv^2)$$

y así resulta

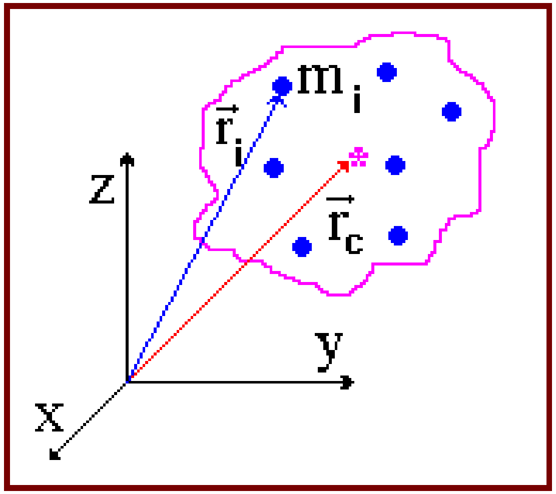
$$\boxed{\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \Delta T_{or}}$$

Sistema de partículas

Trabajo Mecánico

Así, el trabajo mecánico para un sistema de partículas resulta

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c + \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i{}'$$



Y, de acuerdo con los cálculo hechos, podemos escribir

$$\sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i{}' = \Delta T'$$

Recordemos que las trayectorias a considerar en la expresión previa pueden ser diferentes para cada una de las partículas

Las fuerzas internas:

1) **No modifican el** estado de movimiento del **centro de masa del sistema.**

2) **No modifican el momento Angular del sistema.**

3) **SI pueden modificar la energía del sistema**

Sistema de partículas

Energía Mecánica

Supongamos la existencia de fuerzas de tipo conservativo. Estas fuerzas pueden asociarse a la presencia de diferentes tipos de energías potenciales:

$$\int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = -\Delta\Phi_i \Longrightarrow \Phi_{ext} = \sum \Phi_i$$

$$\int_A^B \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = -\Delta\Phi_{ij} \Longrightarrow \Phi_i^{int} = \sum_j \Phi_{ij} \Longrightarrow \Phi_{int} = \frac{1}{2}\sum \Phi_i^{int}$$

Utilizando las energías potenciales podemos definir la energía mecánica del sistema como sigue:

$$E = T + \Phi_{ext} + \Phi_{int}$$

Utilizando las expresiones anteriores y el teorema de las fuerzas vivas llegamos a la siguiente relación entre la energía mecánica y el trabajo hecho por las fuerzas no conservativas presentes en el sistema

$$\boxed{\Delta E = W_{NC}^{ext} + W_{NC}^{int}}$$