Energía Mecánica

Comenzamos con la relación

$$\int_A^B \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r} = \left(T_B + \Phi_B\right) - \left(T_A + \Phi_A\right)$$

La cual tiene en cuenta la presencia de fuerzas de tipo **conservativo** y **no-conservativo.**

Definiendo la **Energía Mecánica** como

$$\boxed{E = T + \Phi}$$

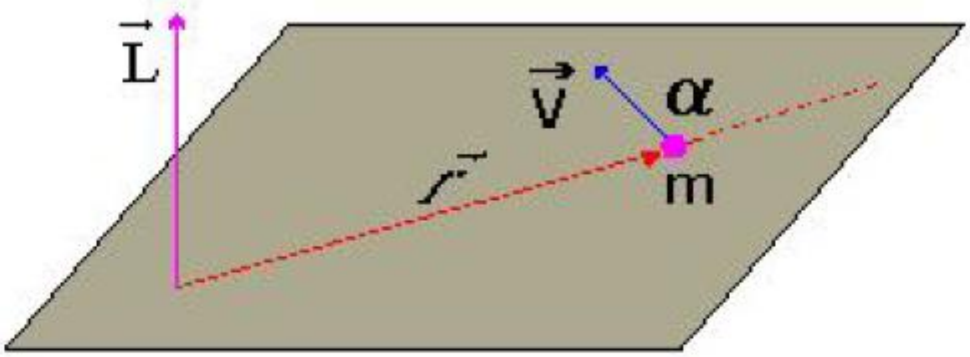
Con la cual podemos re-expresar el teorema de las fuerzas vivas como:

$$\boxed{\int_A^B \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r} = E_B - E_A}$$

Momento Angular

Ahora, revisemos el concepto de momento angular:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}_{xyz}$$



El **momento angular** esta vinculado con el **Momento de la fuerzas** como sigue:

$$\vec{M} = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right]_{xyz}$$

Esto, establece el siguiente teorema de conservación:

$$\boxed{\vec{M} = 0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = cte \quad \therefore \quad \boxed{\vec{L} = \vec{L}_o} \longrightarrow \boxed{m\, r^2\, \dot{\theta} = L_o}$$

Movimientos acotados espacialmente

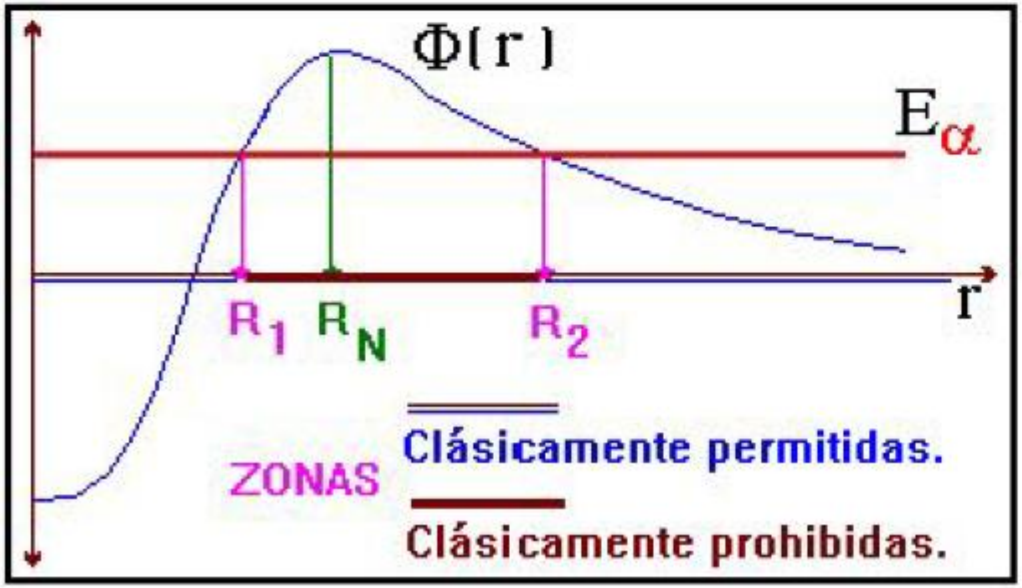
Partiendo de la definición de la energía mecánica:

$$T + \Phi(\vec{r}) = E$$

resulta

$$T(\vec{r}) = E - \Phi(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad E \geq \Phi(\vec{r}) \quad \textbf{Zona Clásicamente permitida}$$

$$E < \Phi(\vec{r}) \quad \textbf{Zona Clásicamente prohibida}$$



Movimiento en un campo radial y esféricamente simétrico

Partimos de la definición de la fuerza:

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{e}_r \quad \begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{L_\circ}{mr^2} \\[2ex] \Phi = \Phi(r) \end{cases}$$

La energía mecánica nos da:

$$T + \Phi(r) = E_\circ \;\Longrightarrow\; \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \Phi(r) = E_\circ$$

Así, la energía cinética radial resulta lleva a

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_\circ - \left[\Phi(r) + \frac{L_\circ^2}{2mr^2}\right]$$

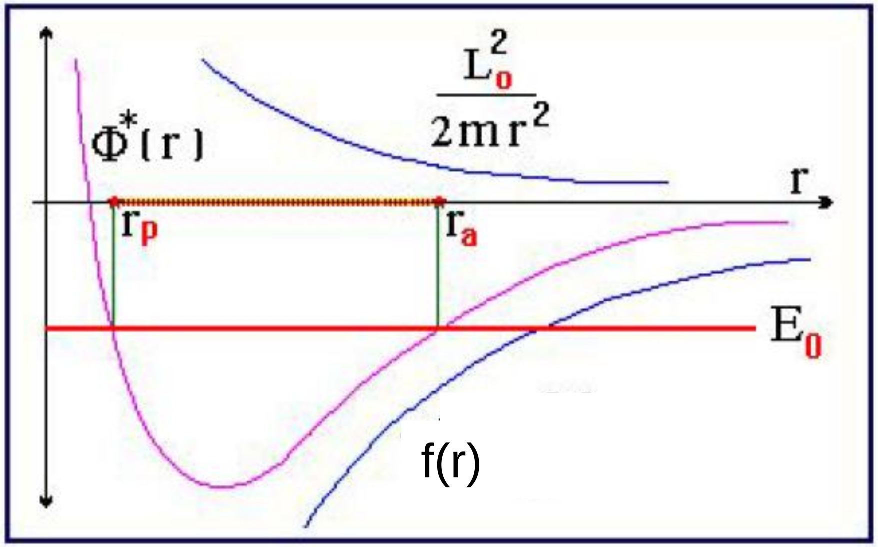
$$\boxed{\Phi^*(r) = \Phi(r) + \frac{L_\circ^2}{2mr^2}}$$

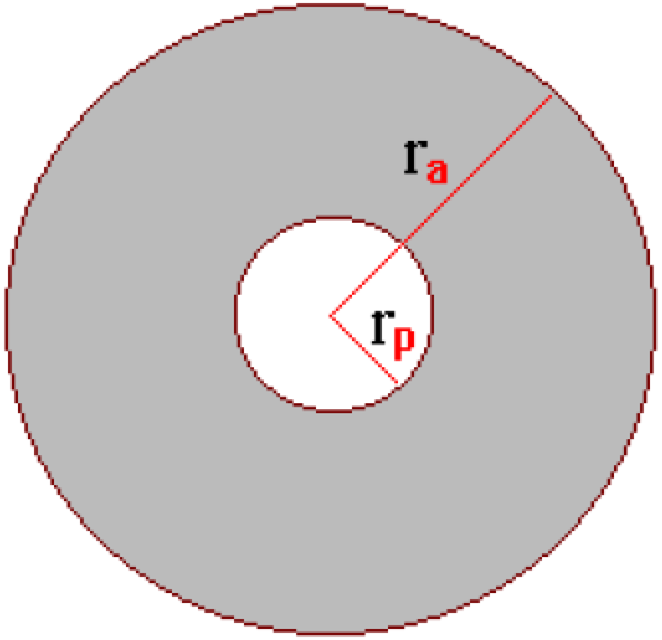
Energía potencial efectiva

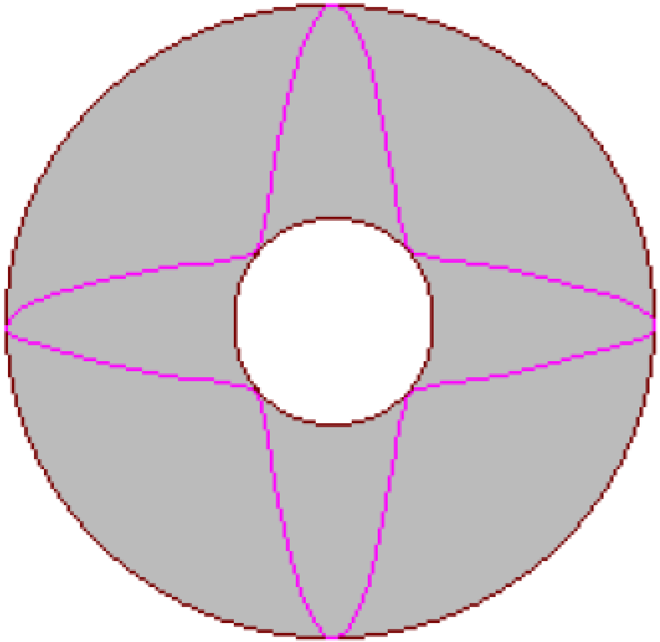
$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_\circ - \Phi^*(r)$$

Movimiento en un campo radial y esféricamente simétrico

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_\circ - \Phi^*(r)$$

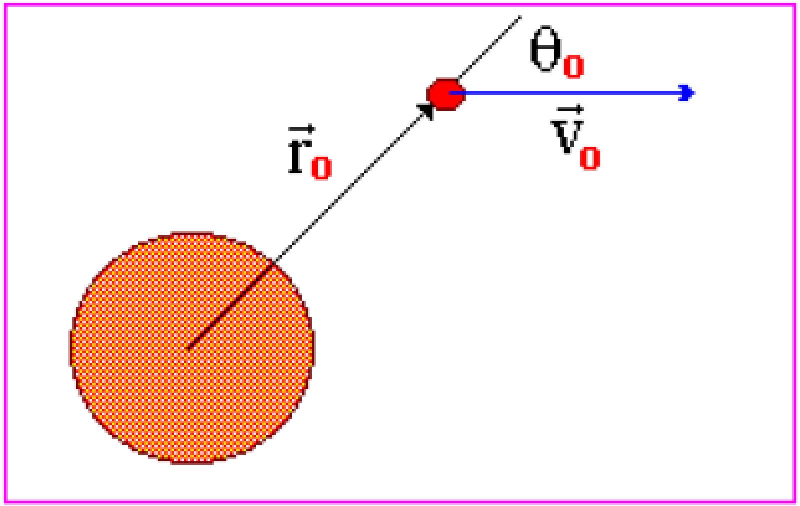






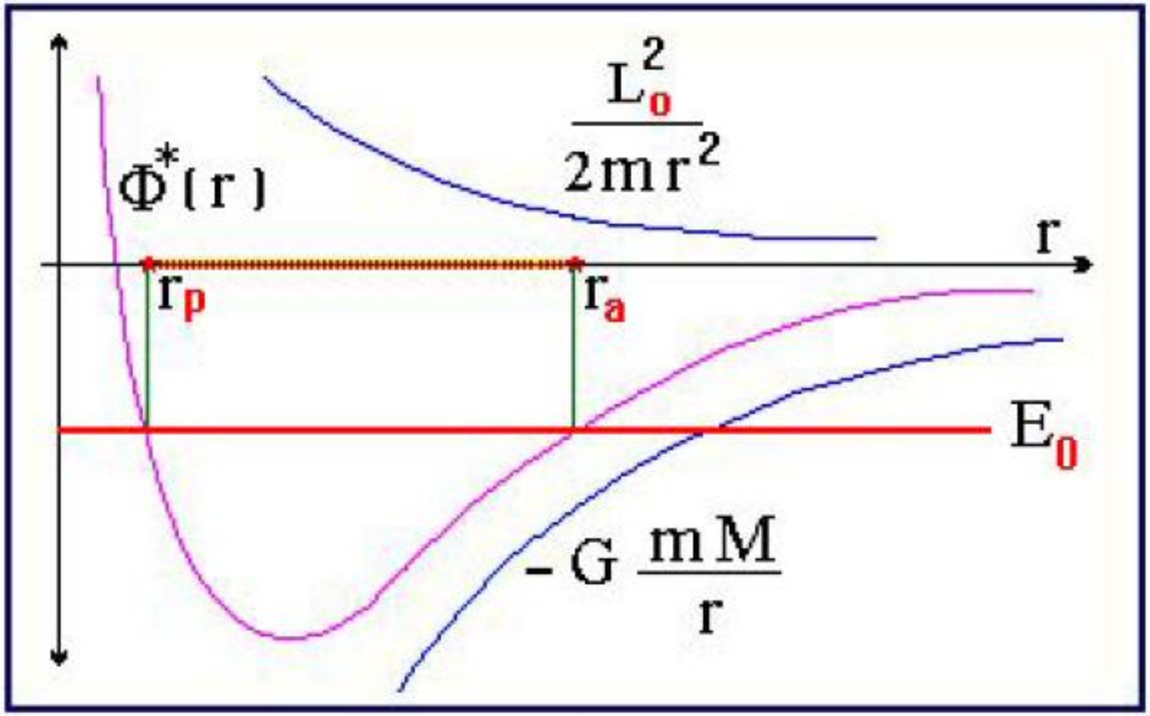
Movimiento en un campo radial y esféricamente simétrico

$$\Phi^*(r) = \frac{L_\circ^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}$$

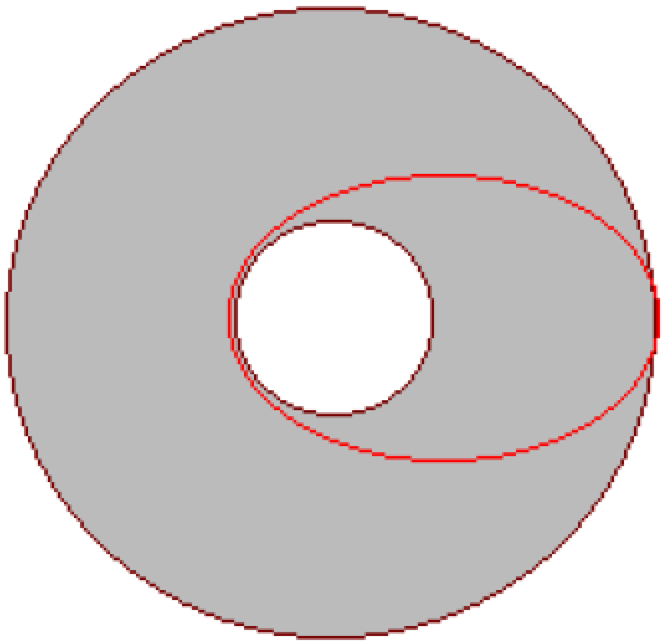


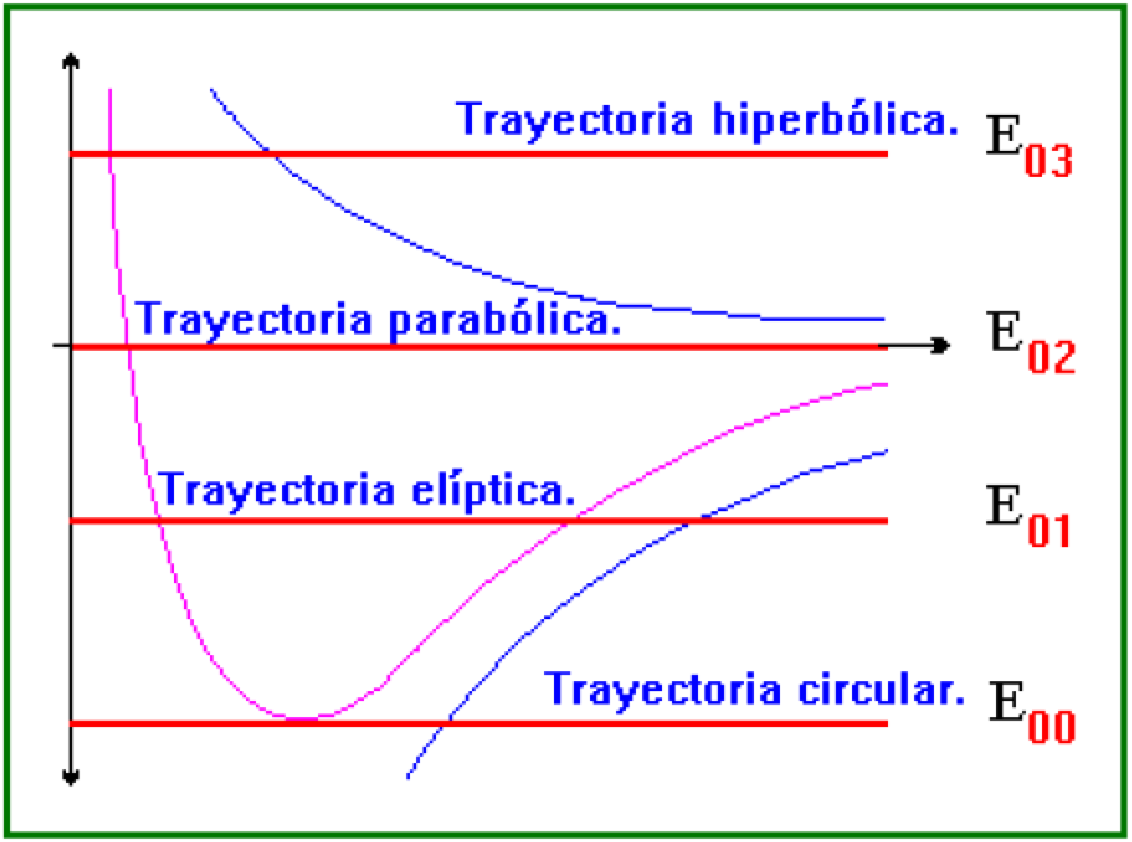
$$\frac{1}{2}mv_\circ^2 - G\frac{mM}{r_\circ} = 0$$

$$v_{o-escape} = \sqrt{\frac{2GM}{r_\circ}}$$



Movimiento en un campo radial y esféricamente simétrico





$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_\circ - \Phi^*(r)$$

$$\Phi^*(r) = \frac{L_\circ^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}$$

Ecuación de Binet

Partimos de la ecuación de Newton para la coordenada radial

$$\boxed{m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r)} \qquad \boxed{m\, r^2\, \dot{\theta} = L_o} \qquad \Longrightarrow \qquad m\left(\ddot{r} - \frac{l_o^2}{r^3}\right) = f(r)$$

Ahora, usamos la regla de la cadena

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} \quad \Longrightarrow \quad \dot{r} = \frac{l_o}{r^2}\frac{dr}{d\theta} \quad \Longrightarrow \quad \dot{r} = -l_o \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Repetimos el calculo para la derivada segunda

$$\ddot{r} = -l_o \frac{d}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \quad \Longrightarrow \quad \ddot{r} = -l_o\dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \quad \Longrightarrow \quad \ddot{r} = -\frac{l_o^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Introduciendo el cambio de función

$$\boxed{u = \frac{1}{r}}$$

resulta

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u(\theta) = \frac{f(u)}{m l_o^2 u^2}}$$

Ecuación de Binet

Ecuación de Binet: orbitas

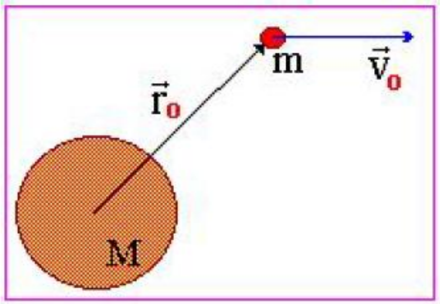
En particular para el campo gravitatorio, resulta

$$\boxed{f(r) = -G\frac{mM}{r^2}} \qquad f(u) = -GmMu^2 \qquad \boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u(\theta) = -\frac{GM}{l_\circ^2}}$$

y su solución es:

$$u(\theta) = \frac{GM}{l_\circ^2} + A\cos(\theta + \delta)$$

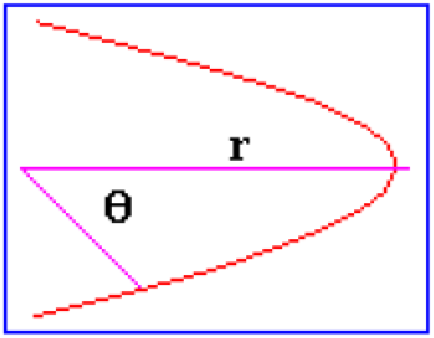
Introduciendo la excentricidad $\boxed{\varepsilon = \frac{Al_\circ^2}{GM}}$ resulta



$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{l_\circ^2}[1 + \varepsilon\cos(\theta + \delta)]$$

$\delta = 0$

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{l_\circ^2}(1 + \varepsilon\cos\theta)$$



Ecuación de Binet: orbitas

Definiendo la energía mecánica inicial

$$E_\circ = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - G\frac{mM}{r}$$

y calculando las derivadas temporales de r

$$\dot{r} = \frac{GM}{l_\circ} \varepsilon \operatorname{sen}\theta$$

resulta

$$\Rightarrow \quad E_\circ = G^2 \frac{mM^2}{2l_\circ^2}(\varepsilon^2 - 1)$$

Así, la excentricidad está dada por:

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2l_\circ^2 E_\circ}{G^2 mM^2}$$

Ecuación de Binet: orbitas

$E_0 < 0$

$\varepsilon < 1$ elipse

$E_0 = 0$

$\varepsilon = 1$ parábola

$E_0 > 0$

$\varepsilon > 1$ parábola