Física I

Primer cuatrimestre de 2014

Profesor: Gustavo Gasaneo

Asistente: Cristian Ghezzi

Vector cantidad de movimiento (vector):

- Para una particula que se desplaza con una dada velocidad respecto de un cierto sistema de referencia, podemos definir la cantidad de movimiento:

$$\vec{p} = m\,\vec{v}\,\Big|_{tierra}$$

Segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{d\,t}$$

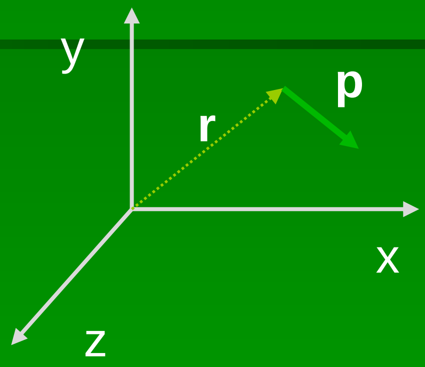
Respecto de un sistema de referencia: ej. Tierra.

Podemos definir el *Impulso* (vector) como la fuerza que actúa en un cierto intervalo de tiempo multiplicada por la duración del intervalo, de manera que:

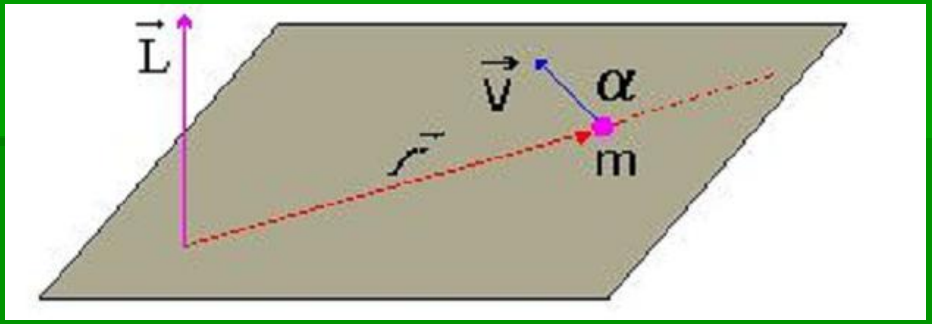
$$I = \vec{F}\,\Delta t = \Delta\,\vec{p}$$

Momento angular (vector):

Definimos el vector momento angular respecto de un sistema de coordenadas, como sigue:



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



$$L_z = m\left(xv_y - yv_x\right) \qquad L_z = mrv_\theta$$

$$L = m\,r\,v_{\theta}$$

$$L = m\,r^2\,\dot{\theta}$$

Definimos el *momento de inercia* de la particula respecto del centro del sistema de coordenadas como:

$$I = m\,r^2$$

De manera que podemos expresar el momento angular como:

$$L = I\,\dot{\theta}$$

Observar la analogía con el momentum lineal:

$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

Ecuación de momentos:

Buscamos una expresión que relacione las fuerzas resultantes con el momento angular.

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right]_{xyz} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_{xyz} \times \vec{p} + \vec{r} \times \left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right]_{xyz}$$

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right]_{xyz} = \vec{r} \times \left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right]_{xyz}$$

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right]_{xyz} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Definimos el momento generado por la resultante de las fuerzas a la que esta sometida la partícula o el centro de masa de un cuerpo:

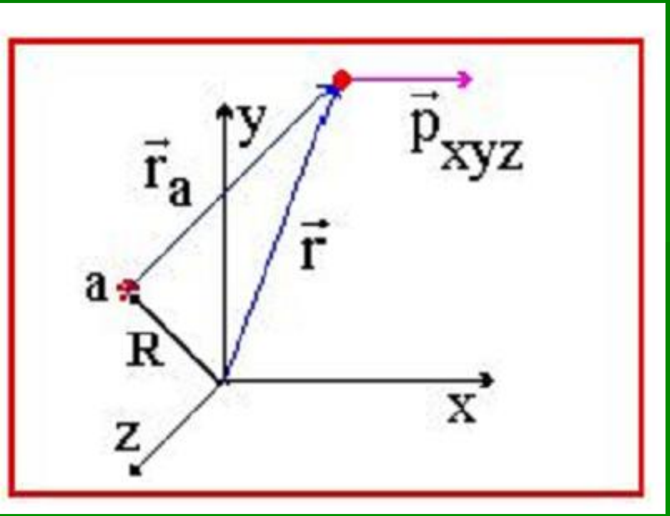
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Por lo tanto las variaciones temporales del momento angular respecto de un sistema de referencia inercial esta relacionada con el momento de las fuerzas resultantes:

$$\vec{M} = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right]_{xyz}$$

A esta ecuación la llamaremos *ecuación de momentos*

Considerando el momento angular respecto de un punto arbitrario “a”:



$$\vec{L}_a = \vec{r}_a \times \vec{p}_{xyz}$$

$$\left.\frac{d\vec{L}_a}{dt}\right]_{xyz} = \left.\frac{d\vec{r}_a}{dt}\right]_{xyz} \times \vec{p}_{xyz} + \vec{r}_a \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_a = \vec{r} - \vec{R}$$

$$\left.\frac{d\vec{L}_a}{dt}\right]_{xyz} = (\vec{v}_{xyz} - \vec{v}_{A/xyz}) \times \vec{p}_{xyz} + \vec{r}_a \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_a = \left.\frac{d\vec{L}_a}{dt}\right]_{xyz} + \vec{v}_{a/xyz} \times \vec{p}_{xyz}$$

Si el punto respecto del cual se toman los momentos es un punto fijo al Sistema inercial, la ecuación de momentos es:

$$\vec{M}_a = \left.\frac{d\vec{L}_a}{dt}\right]_{xyz}$$

Conservacion del momento angular

$$\vec{M}_a = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_a = cte$$

La trayectoria de la particula quedara contenida en un plano perpendicular al vector momento angular, que permanece constante.

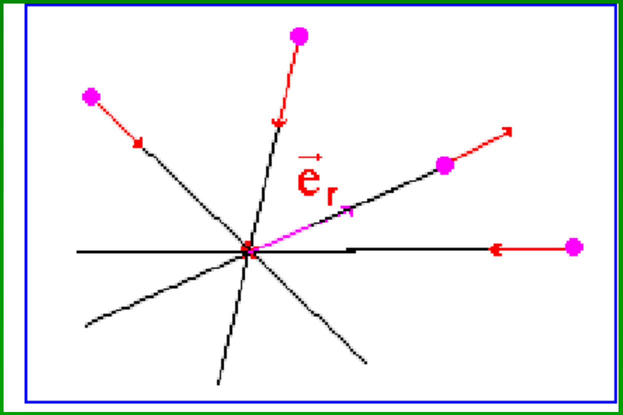
$$m\, r_a^2\, \dot{\theta} = cte$$

$$m\, r_a^2\, \dot{\theta} = L_{oa}$$

$$\dot{\theta} = \frac{L_o}{m\, r^2}$$

Movimiento en un campo de fuerza radial esféricamente simétrico

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{e}_r$$



En este caso el momento angular se conserva respecto del centro de fuerzas. Por lo tanto:

$$\dot{\theta} = \frac{L_\circ}{m\,r^2}$$

$$f(r) = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)$$

$$\ddot{r} = \left(\frac{L_\circ}{m}\right)^2 \frac{1}{r^3} + \frac{f(r)}{m}$$

$$\dot{r}d\dot{r} = \left(\frac{L_\circ}{m}\right)^2 \frac{1}{r^3} dr + \frac{f(r)}{m} dr$$

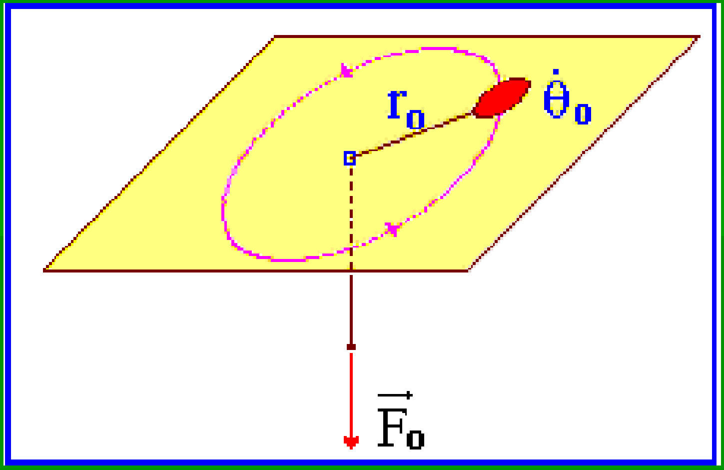
$$\dot{r}^2 = \dot{r}_\circ^2 + \left(\frac{L_\circ}{m}\right)^2 \left(\frac{1}{r_\circ^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2}{m}\int_{r_o}^{r} f(r)dr$$

En términos del *momento angular especifico*

$$\dot{r}^2 = \dot{r}_\circ^2 + l_\circ^2\left(\frac{1}{r_\circ^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2}{m}\int_{r_\circ}^{r} f(r)\,dr$$

Ejemplo de aplicación:

$$F_\circ = m r_\circ \dot{\theta}_\circ^2$$



Si aplicamos una fuerza k veces mayor,
la velocidad angular respecto de la nueva posición será:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{L_\circ}{m r_1^2}$$

Si:

$$r_1 = \frac{r_\circ}{2} \qquad y \qquad L_\circ = m r_\circ^2 \dot{\theta}_\circ$$

Queremos saber la velocidad radial de la partícula:

$$\dot{\theta}_1 = 4\dot{\theta}_\circ$$

$$\dot{r}^2 = \dot{r}_\circ^2 + l_\circ^2 \left(\frac{1}{r_\circ^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2}{m} \int_{r_o}^{r} k m r_\circ \theta_\circ^2 \, dr$$

$$\dot{r}^2 = (k-3)\, r_\circ^2 \, \dot{\theta}_\circ^2$$

Por lo tanto para llevar la particula a un a radio que sea la mitad del inicial es necesario aplicar una fuerza al menos tres veces mayor.

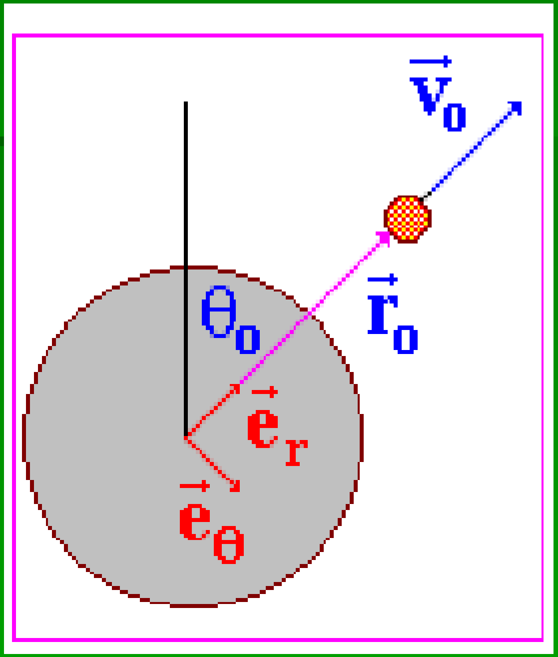
$$\dot{r}_1 = 0 \qquad y \qquad \dot{\theta}_1 = 4\dot{\theta}_\circ$$

$$v_1 = 2v_\circ$$

Para mantenerla en una trayectoria circular:

$$F_1 = mr_1\dot{\theta}_1^2 \qquad \therefore \qquad F_1 = 8mr_\circ\dot{\theta}_\circ^2$$

Tiro vertical de largo alcance



$$\vec{F} = -G\,\frac{mM}{r^2}\,\vec{e}_r$$

$$\dot{\theta} = \frac{L_\circ}{m\,r^2}$$

$$\dot{\theta} = 0 \qquad \therefore \qquad \theta = \theta_\circ$$

$$\dot{r}^2 = \dot{r}_\circ^2 - 2GM\left(\frac{1}{r_\circ} - \frac{1}{r}\right)$$

$$v^2 = v_\circ^2 - 2GM\left(\frac{1}{r_\circ} - \frac{1}{r}\right)$$

$$r_m = \frac{2GMr_\circ}{2GM - r_\circ v_\circ^2}$$

$$v_{\circ(\text{escape})} = \sqrt{\frac{2GM}{r_\circ}}$$