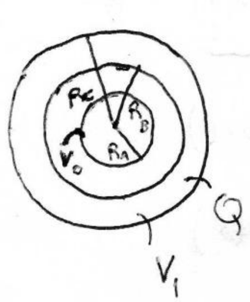
Problema (4): (GUÍA 02)

a).



$V_0 \neq V_1$

V: potencial electrostático

Ec. de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \cancel{\frac{\partial V}{\partial \theta}}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}} = 0$$

$\to 0 \qquad \to 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right) = 0$$

(porque tengo simetría radial).

$$r^2 \frac{dV}{dr} = C_1 \Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{-C_1}{r} + C_2}$$

Soluc. general de ec. de Laplace fuera de los conductores.

Condiciones de Borde (C.B) para $r \geq R_c$: $\begin{cases} (1)\ V(R_c) = V_1 \\ (2)\ V(r \to \infty) \to 0 \end{cases}$

de (2): $\lim_{r \to \infty}\left(-\frac{C_1}{r} + C_2\right) = \boxed{C_2 = 0}$

de (1): $V(R_c) = \frac{-C_1}{R_c} = V_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = -V_1 R_c}$

Por lo tanto la solución de la ec. de Laplace para $r \geq R_c$:

$$\boxed{V(r) = \frac{V_1 \cdot R_c}{r}} \quad r \geq R_c$$

Luego por las propiedades de los conductores el potencial en el cascarón es constante. Entonces:

$$V(r) = C_3 \qquad R_B \leq r \leq R_c$$

Y como el potencial debe ser continuo en R_c:

$$V(R_c) = C_3 = \frac{V_1 \cancel{R_c}}{\cancel{R_c}} \Rightarrow \boxed{C_3 = V_1}$$

$\Rightarrow \boxed{V(r) = V_1}$ $R_B \leq r \leq R_c$ (es decir en el cascarón conductor)

Aplico C.B. a soluc. de Ec. de Laplace: $\boxed{V(r) = -\frac{C_4}{r} + C_5}$ en $R_A \le r \le R_B$

$$\underline{C.B}\begin{cases} (1) \quad V(R_B) = V_1 \text{ (por continuidad del potencial)} \\ (2) \quad V(R_A) = V_0 \text{ (condición de borde impuesto)} \end{cases}$$

$$(1): \quad V(R_B) = -\frac{C_4}{R_B} + C_5 = V_1$$

$$(2): \quad V(R_A) = -\frac{C_4}{R_A} + C_5 = V_0$$

$$-C_4\left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A}\right) = V_1 - V_0 \Rightarrow C_4 \frac{(R_A - R_B)}{R_B R_A} = V_0 - V_1$$

$$\boxed{C_4 = \frac{(V_0 - V_1) R_B R_A}{(R_A - R_B)}} \quad (*)$$

$\Rightarrow$ reempl. (*) en (1): $$-\frac{(V_0 - V_1)\cancel{R_B} R_A}{(R_A - R_B)\cancel{R_B}} + C_5 = V_1 \Rightarrow C_5 = \frac{V_1(R_A - R_B) + (V_0 - V_1)R_A}{(R_A - R_B)}$$

$$\Rightarrow C_5 = \frac{-V_1 R_B + V_0 R_A}{(R_A - R_B)}$$

Entonces, soluc. entre conductores:

$$\boxed{V(r) = -\frac{(V_0 - V_1) R_B R_A}{(R_A - R_B)\, r} + \frac{(-V_1 R_B + V_0 R_A)}{(R_A - R_B)}} \quad R_A \le r \le R_B$$

Finalmente para $r \le R_A$, por ser conductor $V = cte = C_6$

$V(r) = C_6$ y por continuidad de V: $V(R_A) = V_0 = C_6$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = V_0} \quad r \le R_A$$

b) Conecto a tierra el conductor interior $\rightarrow V_0 = 0$

<u>Entonces</u> <u>distribuc.</u> <u>de</u> <u>V</u>:

$$\begin{cases} V(r) = 0 & r \leq R_A \\ V(r) = \dfrac{V_1\, R_B\, R_A}{(R_A - R_B)\, r} - \dfrac{V_1 R_B}{(R_A - R_B)} & R_A \leq r \leq R_B \\ V(r) = V_1 & R_B \leq r \leq R_C \\ V(r) = \dfrac{V_1 R_C}{r} & r \geq R_C \end{cases}$$

Por lo tanto diferencia de potencial entre conductores:

$$V(R_A) - V(R_B) = 0 - \left[\frac{V_1 \cancel{R_B}\cdot R_A}{(R_A - R_B)\cancel{R_B}} - \frac{V_1\, R_B}{(R_A - R_B)}\right] = -V_1\frac{(\cancel{R_A} - R_B)}{(\cancel{R_A - R_B})} = \boxed{-V_1}$$

Como era de esperar.

<u>Carga</u> <u>neta</u>:

* En cascarón es Q, dado que queda con la misma carga que tenía al inicio, ya que en el mismo al conectar a tierra el conductor interior se induce carga pero no se vuelve a cargar.

* En conductor interior:

Aplico ley de Gauss para esfer S con $R_A \leq r \leq R_B$:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_n}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

q = carga del conductor interno.

$$R_A \leq r \leq R_B \quad \vec{E} = -\frac{dV}{dr}(\check{r}) = \frac{V_1 R_B \cdot R_A}{(R_A - R_B)\, r^2}(\check{r})$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} V_1 R_B \cdot R_A\, (\check{r})\cdot \cancel{r^2}\, \text{sen}\theta \cdot d\phi \cdot d\theta\, (\check{r}) = V_1 R_B R_A \ldots 2\pi\, \underbrace{(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}}_{-(-1-1)=2}\, \underbrace{(\check{r})(\check{r})}_{=1} = Q_n$$

$$\Rightarrow \boxed{q = \frac{V_1\, R_B\, R_A\, 4\pi\varepsilon_0}{(R_A - R_B)}}$$ (Carga del conductor interno)

c) Comparando con soluc. problema 26) GUIA 01. (para $V_0 = 0$)

$$V(r) = \frac{(Q-q)}{4\pi\varepsilon_0\, r} \qquad r \geq R_C$$

$$V(r) = \underbrace{\frac{(Q-q)}{4\pi\varepsilon_0\, R_C}}_{cte} \qquad R_B \leq r \leq R_C$$

$$V(r) = \underbrace{\frac{(Q-q)}{4\pi\varepsilon_0\, R_C} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_B}}_{cte} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad R_A \leq r \leq R_B$$

$$V(r) = 0 \qquad r \leq R_A$$

Obtenido por ley de gauss el $\vec{E}$ y luego $V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}_i\, d\vec{r}$)

aplicando ppio. de superposición y prop. de conductores

Observar que tiene la misma funcionalidad que $V(r)$ obt. en

Las constantes de la funciones son iguales si se cumple:

$$\boxed{V_1 = V(R_C) = \frac{(Q-q)}{4\pi\varepsilon_0\, R_C}}$$