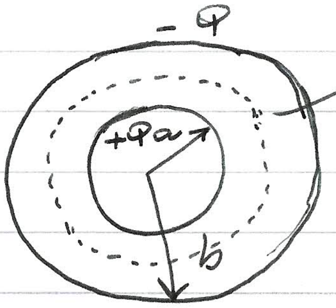
## Guía 2 - Problema 19




superficie gaussiana cilíndrica

cilindros conductores de radios a y b y longitud L

a) Los cilindros son un capacitor → tienen carga Q y -Q distribuida uniformemente. La capacidad es

$C = \frac{Q}{V}$, donde V es la diferencia de potencial entre los cilindros

Para hallar V hallo primero el campo $\bar{E}$ para $a < r < b$ por medio de la ley de Gauss, con la superficie gaussiana que se muestra en la figura:

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = +\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q_{enc} = \int \rho_+ dV, \text{ donde}$$

$$\rho_+ = \frac{Q}{\pi a^2 L} \quad \left(\text{carga distribuida uniformemente}\right)$$

∴ Si la sup. gaussiana cilíndrica tiene un largo $l < L$, entonces, como el campo es radial:

$$|E|(2\pi r l) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_+ \pi a^2 l = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q l}{L}$$

$$\Rightarrow \bar{E} = \frac{1}{2\varepsilon_0 \pi r L} Q \, \hat{r} \quad (\text{para } a < r < b)$$

Nota: Se supuso que los radios de los cilindros son $\ll L$, su longitud, de forma que es una buena aproximación aplicar la ley de Gauss

La diferencia de potencial $V$ en la capacitancia $C$ corresponde a la diferencia entre el potencial de $+Q$ (cilindro de radio $a$) menos el potencial de $-Q$ (cilindro de radio $b$)

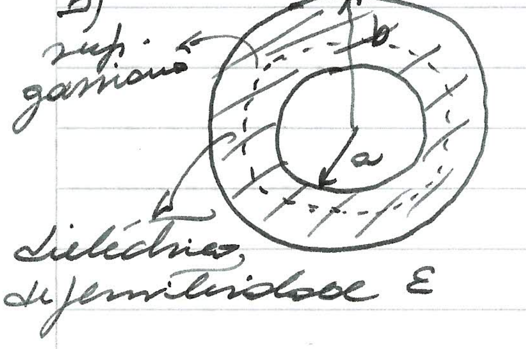
$$\therefore \quad V = -\int_b^a \bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r L}\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$\Rightarrow$ La capacitancia queda $\boxed{C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}}$

También se suele considerar la capacitancia por unidad de longitud:

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}$$

b)




El procedimiento es el mismo, sólo que ahora trabajamos primero con el vector desplazamiento $\bar{D}$

$$\oint \bar{D}\cdot d\bar{S} = \frac{Q_{enc}(\text{libre})}{\cancel{\varepsilon_0}}$$

donde la carga encerrada es la carga libre que corresponde a la del cilindro de radio $a$

$\Rightarrow$ Como antes, se obtiene $|D|(2\pi r l) = \dfrac{Q l}{L}$

$\Rightarrow$ $\bar{D} = \dfrac{Q}{2\pi r L}\hat{r}$ ; Como el medio es lineal, entonces $\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$

$$\Rightarrow \quad \bar{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r L}\hat{r} \qquad (a < r < b)$$

∴ lo único que cambia respecto a lo calculado en el inciso a) es que se reemplaza $\varepsilon_0$ por $\varepsilon$. Esto implica que el campo eléctrico disminuye ante la presencia del dieléctrico (ya que $\varepsilon > \varepsilon_0$)

⇒ La diferencia de potencial queda

$$V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \boxed{C_d = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(b/a)}}$$

Notar que la capacidad aumenta respecto a la capacidad en el vacío, calculada en a). De hecho,

$$\frac{C_d}{C_v} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = k : \text{cte dieléctrica} \Rightarrow \boxed{C_d = k\,C_v}$$

$C_d$ : capacidad con dieléctrico
$C_v$ : capacidad en el vacío

c) $C = \dfrac{Q}{V} \Rightarrow Q = CV$

∴ (i) En el vacío $\quad Q_{máx,v} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 L V}{\ln(b/a)} = Q_v$

(ii) Con dieléctrico $\quad Q_{m,d} = \dfrac{2\pi\varepsilon L V}{\ln(b/a)} = Q_d$

⇒ $Q_d = k\,Q_v$ → la carga máxima que se puede almacenar aumenta al colocar un dieléctrico (si se mantiene la diferencia de potencial)