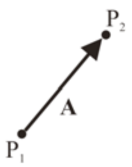
Repaso de Vectores

Autor: Dra. Estela González

Algunas cantidades físicas como tiempo, temperatura, masa, densidad y carga eléctrica se pueden describir plenamente con un número y una unidad, pero otras cantidades (también importantes) están asociadas a una *dirección* y no pueden describirse con sólo un número ya que este sólo nos dicen parte de la historia. Tales cantidades desempeñan un papel fundamental en muchas áreas centrales de la física, como el movimiento y sus causas y los fenómenos de electricidad y magnetismo. Un ejemplo sencillo es el movimiento de un avión: para describirlo completamente debemos indicar no sólo que tan ***rápido*** se mueve, sino también hacia ***dónde***. Para ir de Bahía Blanca a Neuquén un avión debe volar hacia el Oeste no al Este. La *rapidez* del avión combinada con su *dirección* constituye una cantidad llamada *velocidad*.

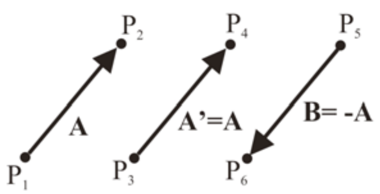
Si una cantidad física se describe con solo un ***número***, decimos que es una **cantidad escalar**. En cambio, una **cantidad vectorial** tiene un ***módulo*** (el "*que tanto*") y una ***orientación*** (dirección y sentido) en el espacio; se representan mediante ***vectores***.

Recordemos qué es un vector… Un **vector** es un segmento de recta orientado. Se caracteriza por: 1) su ***módulo***, que es la longitud del segmento (magnitud), 2) su ***dirección***, que viene dada por la recta que pasa por él o cualquier recta paralela a ella, 3) su ***sentido***, que es uno de los dos sentidos posibles sobre la recta que pasa por él, y 4) su ***unidad***.



Al dibujar un vector siempre trazamos una línea con punta de flecha. La longitud de la línea indica la magnitud del vector, y su dirección (la punta de la flecha) coincide con la del vector.

Frecuentemente podemos representar una cantidad vectorial con una letra: $\vec{A}$ (en la literatura aparece en negrita con o sin una fecha superior). La ***FLECHA*** es un recordatorio de que los vectores tienen diferentes propiedades a los escalares; nos recuerda que ellos tienen ***DIRECCIÓN.***



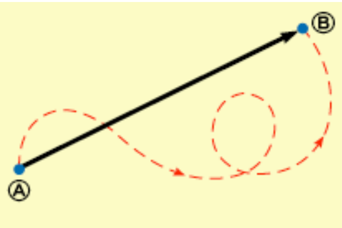
Si dos vectores tienen la misma dirección y sentido son paralelos. Si, por otro lado, tienen sentidos opuestos (de la dirección) se dice que son anti-paralelos.

Si dos vectores tienen la misma magnitud y sentido son iguales (aunque partan y lleguen a distintos lugares). El vector opuesto (o negativo) posee igual magnitud pero sentido opuesto (de la dirección).

Se suele representar a la magnitud de una cantidad vectorial con la misma letra que usamos para el vector pero SIN la flecha, o con la flecha pero entre barras verticales: $A = \left|\vec{A}\right|$. Por definición, el ***módulo*** de una cantidad vectorial es un ***escalar*** (un número) y es siempre ***positivo***. Cabe señalar que un vector **NUNCA** puede ser igual a un escalar porque son cantidades de distinto tipo. La expresión $\vec{A} = 6\ km$ es tan *absurda* como ”2 naranjas = 3 manzanas”.

Al dibujar diagramas con vectores se utiliza una escala en la que la distancia es proporcional al módulo del vector.

Para entender mejor los vectores y su combinación, comencemos definiendo la cantidad vectorial más simple: el **desplazamiento**, que es un ***cambio*** en la ***posición*** de un punto. (El punto podría representar una partícula o un cuerpo puntual o un punto.) Dicho cambio en la posición se representa con una línea uniendo el punto de partida (**A**) con el punto final o de llegada (**B**), y con una punta de flecha en este último punto para indicar la dirección. El desplazamiento es una **cantidad vectorial** porque debemos decir no sólo ***cuánto*** se mueve la partícula, sino también hacia ***dónde***.



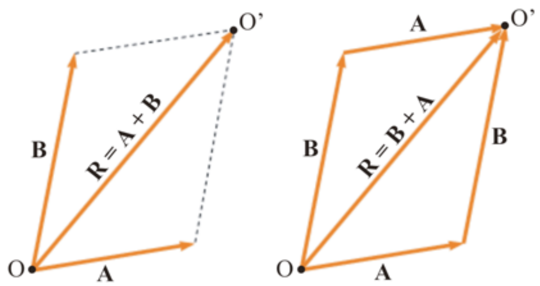
Un desplazamiento siempre es un segmento recto dirigido del punto inicial al final aunque el camino seguido sea curvo.

Si un camino termina donde empezó, el desplazamiento es … CERO (nulo).

PROPIEDADES VECTORIALES:

SUMA de vectores:

Supongamos que una partícula sufre un desplazamiento $\vec{A}$, seguido de un desplazamiento $\vec{B}$. El resultado final es el mismo que si la partícula hubiera partido del mismo punto (O) y sufrido un desplazamiento $\vec{R}$ (hasta llegar a O’). Llamamos $\vec{R}$ al vector sumatoria o ***Resultante*** de los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$:



$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

Al sumar gráficamente los vectores, colocamos la cola del segundo en la cabeza o punta del primero. Notemos que

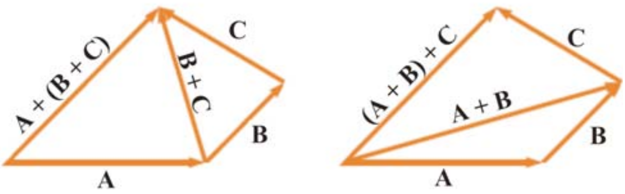
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}.$$

La suma es **conmutativa**.

Un ***error*** común es suponer que si $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ entonces, el módulo de $|\vec{R}|$ debe ser igual a la suma de los módulos $|\vec{A}|$ y $|\vec{B}|$. Lo cuál, en general, es **incorrecto**: $|\vec{R}| \neq |\vec{A}| + |\vec{B}|$, ya que la suma vectorial depende de los módulos de los vectores involucrados y del ángulo que forman.

Si necesitamos sumar mas de dos vectores podemos sumar primero dos y luego ir sumando a la resultante anterior un nuevo vector:

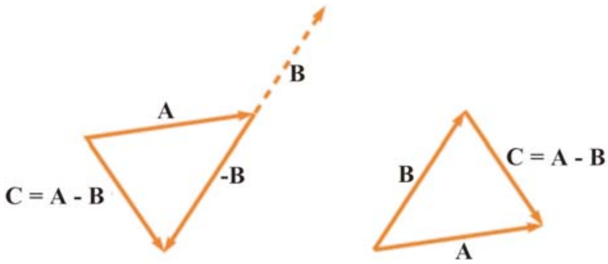
$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$



La suma es **asociativa**.

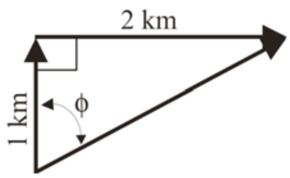
De igual manera podemos definir la diferencia o resta entre vectores; ya que el vector $-\vec{A}$ tiene el mismo módulo que $\vec{A}$ pero sentido opuesto:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



EJEMPLO 1:
Una esquiadora viaja 1.00 km al Norte y luego 2.00 km al Este por un campo nevado horizontal. a) ¿A qué distancia y en que dirección está del punto de partida?. b) ¿Qué magnitud (módulo) y dirección tiene su desplazamiento resultante?.

SOLUCIÓN :



El problema implica combinar el desplazamiento, así que podemos resolverlo con una suma de vectores. Cabe señalar que a) y b) son preguntas distintas pero que tienen igual respuesta.

a) Los vectores forman un ángulo rectángulo entre sí; la distancia del punto de partida al de llegada es igual a la longitud de la hipotenusa, la cual puede calcularse por el teorema de Pitágoras:

$$|\vec{R}| = \sqrt{(1^2+2^2)km^2} = 2.24\,km$$

El ángulo f se obtiene por trigonometría. De la definición de tangente

$$tg\phi = \frac{C.O.}{C.A.} = \frac{2km}{1km} \quad \Rightarrow \phi = 63.4°$$

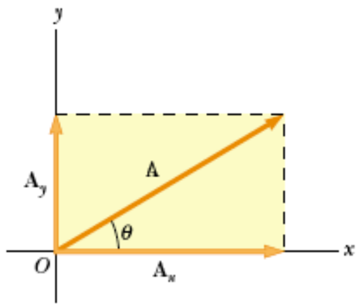
b) La magnitud del desplazamiento resultante es 2.24 km. Podemos describir la dirección como 63.4° E del N (ó 90°-63.4°=26.6° N del E, ángulo complementario).

<u>COMPONENTES de un vector</u>:

Los vectores no siempre forman 90° entre sí, i.e. no siempre son perpendiculares; por ello, necesitamos un método simple pero general para sumarlos. Éste es el ***<u>Método de las componentes</u>***.

Partimos de un *sistema rectangular de ejes coordenados* (ejes cartesianos) y dibujamos el vector en cuestión con su cola en el origen del sistema. Podemos representar cualquier vector en el plano *xy* como la *suma* de un vector paralelo al eje *x* y otro vector paralelo al eje *y*.

Rotulando a esos vectores como $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$; son los **vectores componentes** del vector $\vec{A}$, y su **suma vectorial** es $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$.



Describimos la ***dirección de un vector*** con su *ángulo* relativo a una *dirección de referencia* (eje +*x*) y el ángulo entre el vector y el eje es θ:

$$\cos\theta = \frac{A_x}{A} \quad \Rightarrow A_x = A\cos\theta \quad (1)$$

$$sen\theta = \frac{A_y}{A} \quad \Rightarrow A_y = Asen\theta \quad (2)$$

Las ecs. (1) y (2) indican como obtener las componentes si conocemos la magnitud y la dirección del vector $\vec{A}$. Podemos invertir el proceso y obtener la magnitud y dirección a partir de las componentes aplicando el teorema de Pitágoras. Vemos así que el módulo del mencionado vector es

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2}} \qquad (3)$$

donde siempre tomamos la raíz positiva. La ecuación anterior es válida para cualquier sistema de ejes en tanto sean perpendiculares entre sí. La expresión para la dirección vectorial proviene de la definición de tangente del ángulo. Si medimos θ desde el eje +*x* hacia el eje +*y*

$$tg\theta = \frac{A_y}{A_x} \quad \Rightarrow \theta = arctg\frac{A_y}{A_x} \qquad (4)$$

El uso de esta última expresión para obtener θ tiene una pequeña complicación. Supongamos que $\vec{A}_x$ es mayor que cero pero que $\vec{A}_y$ es negativo, entonces tendremos 2 valores posibles para el ángulo con una separación entre sí de 180°; para saber cual es el valor correcto hay que examinar las componentes. Dado que $\vec{A}_x$ es positiva y $\vec{A}_y$ negativa el valor del 4to cuadrante es el correcto. Si fuera al revés, $\vec{A}_x$ negativa y $\vec{A}_y$ positiva entonces el valor correcto estaría en el 2do cuadrante. Lo mejor es hacer el dibujo para verificar cual posibilidad es la correcta.

El método de las componentes puede ser muy útil a la hora de sumar vectores. La siguiente figura muestra 2 vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y su suma $\vec{R}$, junto con las componentes de los tres vectores.

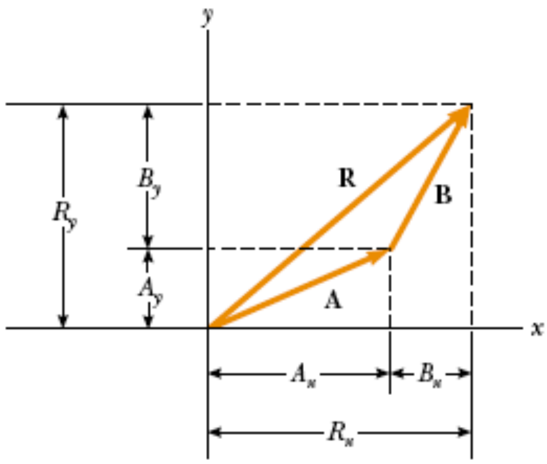
Como $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$ y $\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y$ entonces

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (\vec{A}_x + \vec{A}_y) + (\vec{B}_x + \vec{B}_y)$$
$$= (\vec{A}_x + \vec{B}_x) + (\vec{A}_y + \vec{B}_y) = \vec{R}_x + \vec{R}_y \; .$$

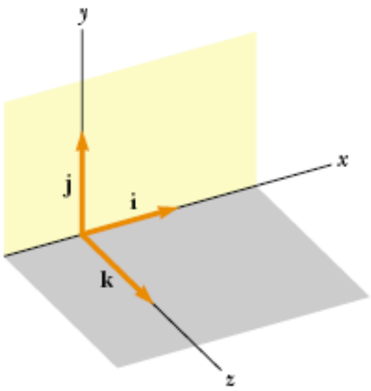
De igual manera que antes, su módulo y el ángulo con el eje $+x$ queda:

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}}$$

y $tg\theta = \dfrac{R_y}{R_x} \quad \Rightarrow \theta = arctg\dfrac{R_y}{R_x}$.



<u>VECTORES UNITARIOS</u>:



Un **<u>vector unitario</u>** es un vector de **módulo 1** (uno), sin unidades. Su único fin es describir una dirección en el espacio.

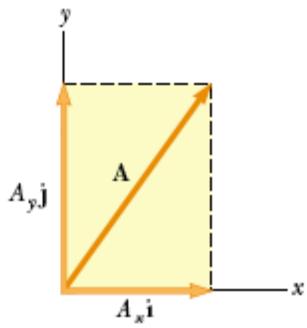
Notación:

$\hat{i}$ paralelo al eje $+x$,

$\hat{j}$ paralelo al eje $+y$,

$\hat{k}$ paralelo al eje $+z$.

Con lo cuál, las componentes del vector $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$ podrían escribirse $\vec{A}_x = A_x\hat{i}$ y $\vec{A}_y = A_y\hat{j}$.



<u>MULTIPLICACIÓN de un vector por un escalar</u>:

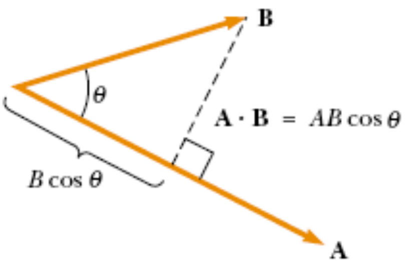
Una cantidad vectorial se puede multiplicar por un escalar, pero el resultado seguirá siendo un vector. En general, cuando un vector se multiplica por un escalar "*c*", $c\vec{A}$ tiene módulo $|c|\left|\vec{A}\right|$ (el valor absoluto de c multiplicado por el módulo de $\vec{A}$). Si $c > 0$ entonces $c\vec{A}$ tiene la dirección de $\vec{A}$; si $c < 0$ tiene sentido opuesto al vector $\vec{A}$.

Notar que el escalar "c" puede tener unidad.

<u>PRODUCTO de vectores</u>:

Hemos visto cómo la suma de vectores es consecuencia natural del problema de combinar vectores (desplazamientos). También podemos expresar muchas relaciones físicas de forma concisa usando **producto de vectores**. Definiremos dos tipos de productos. El primero, llamado **<u>producto escalar o punto</u>**, produce un *<u>escalar</u>*. El segundo producto es el **<u>producto vectorial o cruz</u>**, que da como resultado un *<u>vector</u>*.

<u>Producto escalar</u>: Definimos $\vec{A}\bullet\vec{B}$ como el módulo del vector $\vec{A}$, $|A|$, multiplicado por la componente del vector $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$, $|B|cos\theta$:



$$\vec{A}\bullet\vec{B} = \left\langle \vec{A},\vec{B}\right\rangle = |A||B|cos\theta$$

donde $|B|cos\theta$ es la proyección de $\vec{B}$ sobre la dirección de $\vec{A}$ (la componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$).

Observación: $\hat{i}\bullet\hat{i} = \hat{j}\bullet\hat{j} = \hat{k}\bullet\hat{k} = (1)(1)\cos(0) = 1$

$\hat{i}\bullet\hat{j} = \hat{i}\bullet\hat{k} = \hat{j}\bullet\hat{k} = (1)(1)\cos(90°) = 0$ (El producto de dos vectores perpendiculares entre sí es cero)

Utilizando todo lo visto hasta ahora, obtenemos la siguiente expresión (en términos de las componentes) para el producto escalar:

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = \vec{B}\bullet\vec{A} = A_xB_x + A_yB_y$$

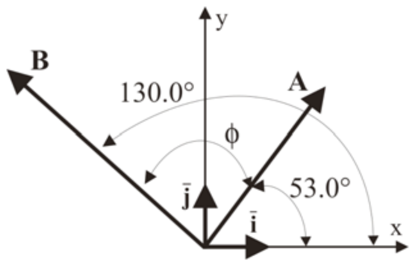
Con el producto escalar también se puede calcular el ángulo entre los dos vectores involucrados: $cos\theta = \dfrac{A_xB_x + A_yB_y}{|A||B|}$.

EJEMPLO 2:

Obtener el producto escalar de los dos vectores mostrados en la figura. Los módulos son A = 4.00 *u* y B = 5.00 *u*.

SOLUCIÓN:

Hay dos maneras de resolver el problema:



(I) Usar los módulos de los vectores y el ángulo entre ellos:

$\vec{A}\bullet\vec{B} = |A||B|cos\phi$, donde ϕ = 130°-53° = 77°

entonces

$\vec{A}\bullet\vec{B} = (4.00\,u)(5.00\,u)cos(77°) = 4.50\,u^2$

(II) Usar las componentes de los vectores:

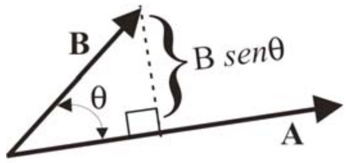
$A_x = (4.00\,u)\cos(53) = 2.407\,u$, $A_y = (4.00\,u)sen(53°) = 3.195\,u$

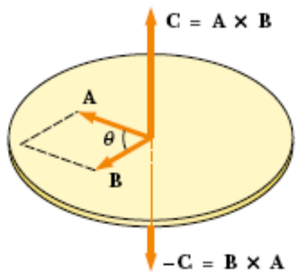
$B_x = (5.00\,u)\cos(130°) = -3.214\,u$, $B_y = (5.00\,u)sen(130°) = 3.830\,u$

entonces

$\vec{A}\bullet\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y = (2.407\,u)(-3.214\,u) + (3.195\,u)(3.830\,u) = 4.50\,u^2$.

Producto vectorial: El producto vectorial, o cruz, entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se denota $\vec{A}\times\vec{B}$. Para definir este producto colocamos nuevamente los dos vectores en el mismo punto. Definimos el producto vectorial como un vector perpendicular al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con módulo $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = |A||B|sen\theta$.





Notar que los dos vectores están el mismo plano.

Recordar que medimos el ángulo θ de $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$ tomando el ángulo más pequeño posible, por lo que $0° \leq \theta \leq 180°$.

Si conocemos las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ podemos calcular las componentes del producto vectorial. Para ello debemos tener presente que el producto vectorial de 2 vectores paralelos (o anti-paralelos) siempre es CERO. En particular, el productor vectorial de un vector consigo mismo es CERO: $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$

Regla de la mano derecha:

$\hat{i}\times\hat{j} = -\hat{j}\times\hat{i} = +\hat{k}$

$\hat{j}\times\hat{k} = -\hat{j}\times\hat{k} = +\hat{i}$

$\hat{k}\times\hat{i} = -\hat{i}\times\hat{k} = +\hat{j}$

Por la regla de la mano derecha: $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$.

Al expandir el producto en términos de sus componentes obtenemos:

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = (A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k})\times(B_x\,\hat{i} + B_y\,\hat{j} + B_z\,\hat{k})$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k} = C_x\,\hat{i} + C_y\,\hat{j} + C_z\,\hat{k}$$

El producto cruz también puede expresarse en forma de determinante:

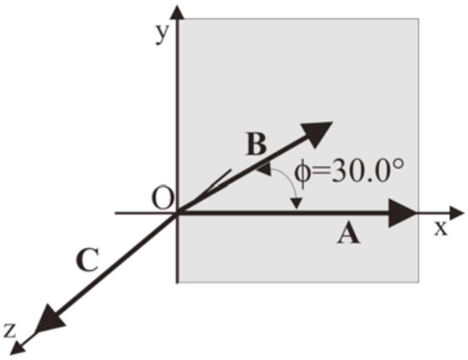
$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}\hat{\boldsymbol{i}}+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}A_x & A_z\\ B_x & B_z\end{vmatrix}\hat{\boldsymbol{j}}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}\hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z - A_zB_y)\hat{\boldsymbol{i}}-(A_xB_z-A_zB_x)\hat{\boldsymbol{j}}+(A_xB_y - A_yB_x)\hat{\boldsymbol{k}}$$
$$=(A_yB_z - A_zB_y)\hat{\boldsymbol{i}}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{\boldsymbol{j}}+(A_xB_y - A_yB_x)\hat{\boldsymbol{k}}$$

EJEMPLO 3:

El vector $\vec{\boldsymbol{A}}$ tiene un módulo de 6 unidades y ésta sobre el eje +*x*. $\vec{\boldsymbol{B}}$ tiene un módulo de 4 unidades y está en el plano *xy* formando un ángulo de 30° con +*x*. Calcular $\vec{A}\times\vec{B}$.

SOLUCIÓN:



Podemos plantear el problema de ***dos maneras:***

(I) Usar $|\vec{C}|=|\vec{A}\times\vec{B}|=|A||B|sen\theta$ para el módulo de $\vec{A}\times\vec{B}$ y luego usar la regla de la mano derecha para encontrar la dirección:

$|\vec{C}|=|A||B|sen\theta=(6u)(4u)sen(30°)=12u^2$,

y por la regla de la mano derecha la dirección es: $+\hat{\boldsymbol{k}}$.

(II) Usar las componentes de $\vec{A}\times\vec{B}$ para obtener las componentes del vector producto:

$A_x=6u,\ A_y=0,\ A_z=0$

$B_x=4\cos(30°)u=2\sqrt{3}u,\ B_y=4sen(30°)u=2u,\ B_z=0$

entonces:

$C_x=A_yB_z - A_zB_y=(0)(0)-(0)(2u)=0$

$C_y=A_zB_x - A_xB_z=(0)(2\sqrt{3}u)-(6u)(0)=0$

$C_z=A_xB_y - A_yB_x=(6u)(2u)-(0)(2\sqrt{3}u)=12u^2$, en $+\hat{\boldsymbol{k}}$.