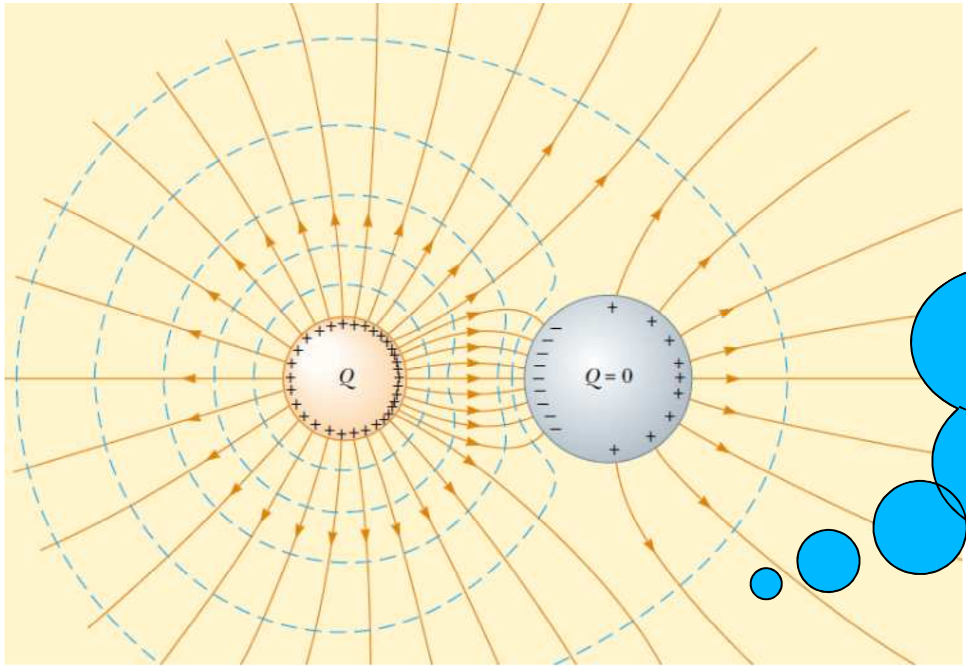
Problemas electrostáticos en conductores

Si se conoce la distribución de carga en todo punto del espacio

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dq'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

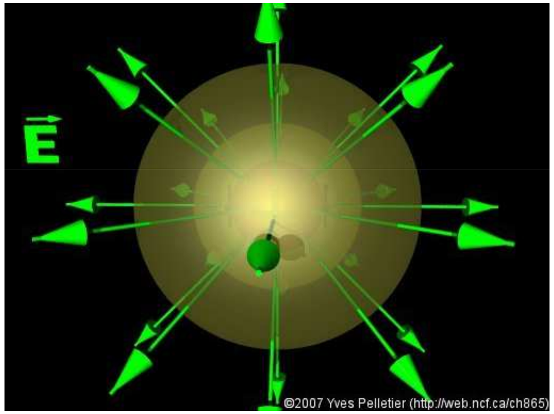


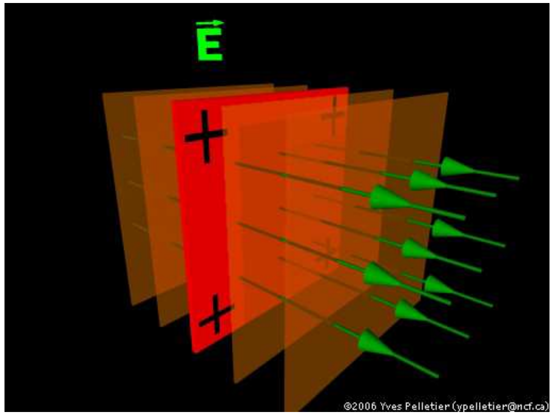
No conocemos la distr. de carga…pero sabemos que los conductores <u>constituyen superficies equipotenciales…y</u> que el potencial varía en forma contínua

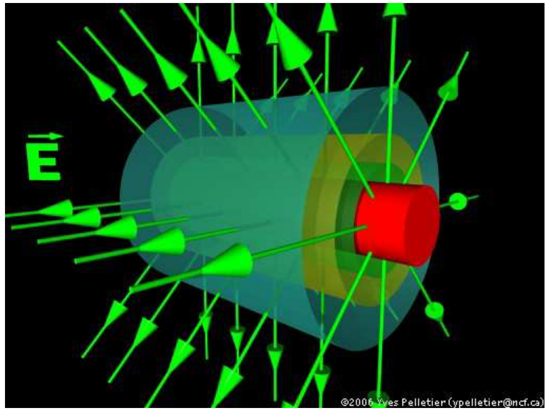
Superficies equipotenciales

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Las superficies equipotenciales son siempre perpendiculares a las líneas de Campo Eléctrico







Los conductores constituyen superficies equipotenciales!!!

Ecuación de Poisson

Ley de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

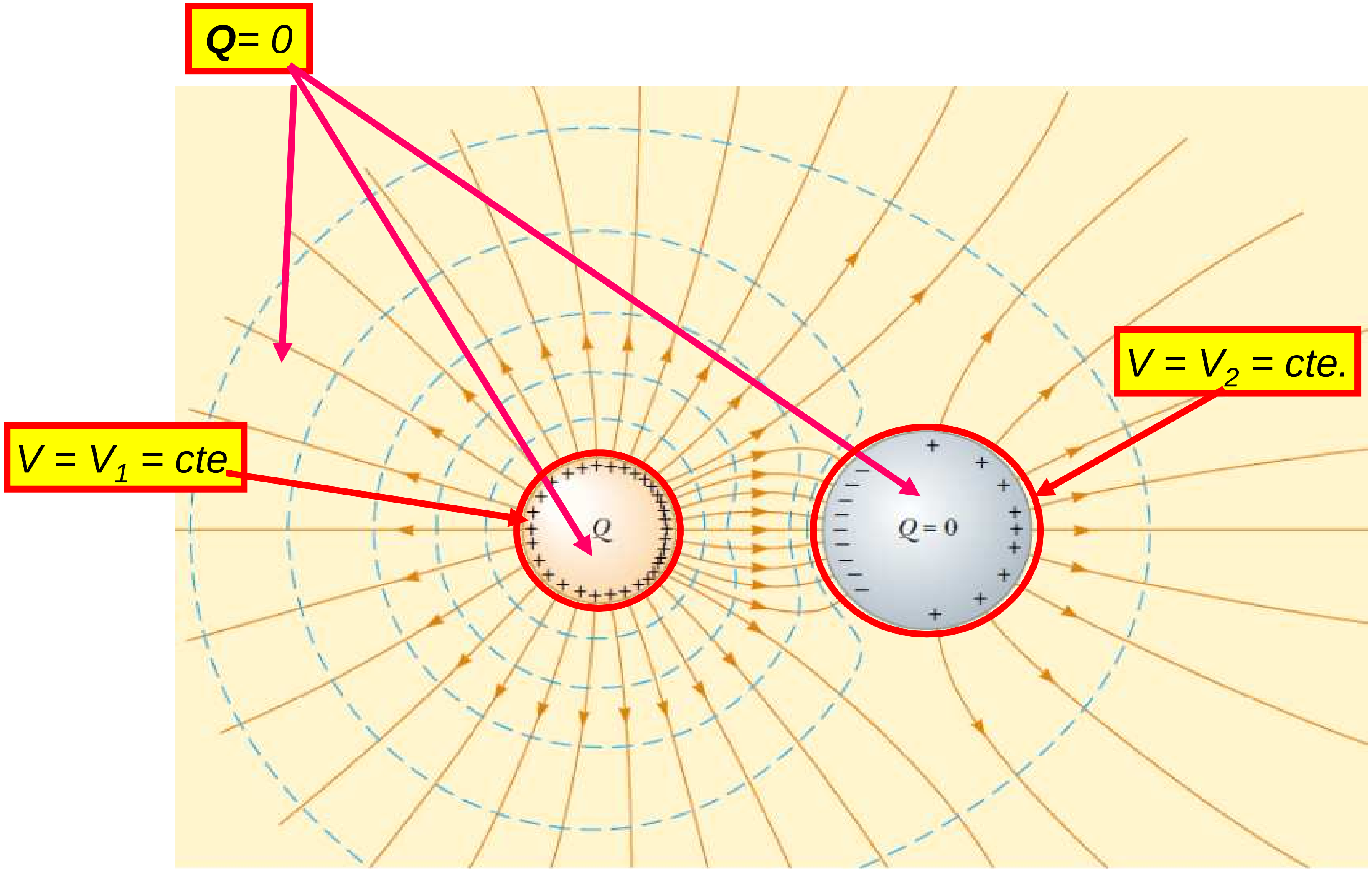
Campo conservativo

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ecuación de Poisson
(ecuación diferencial a derivadas parciales no homogénea)

Conductor cargado y conductor descargado



Ecuación de Laplace

En los problemas electrostáticos en que intervienen conductores, la carga está sobre la superficie de los mismos o como cargas puntuales.

$$\nabla^2 V = 0$$

Ecuación de Laplace

Es posible encontrar V **pidiendo a la solución general la satisfacción de las condiciones de borde**

Para un conjunto dado de condiciones de frontera, la solución a la ecuación de Laplace es única.

Problema donde sólo se conoce el valor del potencial en dos conductores (que sean equipotenciales no significa que las cargas estén distribuidas uniformemente)

Se encuentra el POTENCIAL a partir de la ecuación de Laplace considerando las condiciones de borde.

A partir del potencial se puede calcular el Campo eléctrico

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Conociendo el campo E en la sup del material se puede conocer la densidad de carga en la superficie.

Laplacianos en distintos sistemas de coordenadas

Coordenadas rectangulares:

$$\nabla^2\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas: sen

$$\nabla^2\varphi \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$$

Coordenadas cilíndricas:

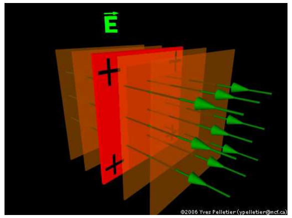
$$\nabla^2\varphi \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Ecuación de Laplace

$$\left.\begin{array}{l}\nabla^2 V = 0 \\ \text{+ condiciones} \\ \text{de borde}\end{array}\right\} \quad V(r) \xrightarrow{-\nabla V} \vec{E}(r) \longrightarrow \sigma$$

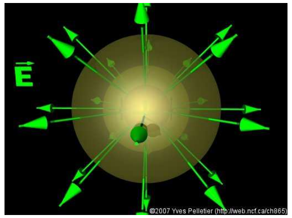
Densidad de carga en la superficie del conductor

Caso Unidimensional



$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0 \qquad V(x) = ax + b \longleftarrow$$

En coord. cartesianas



$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right) = 0 \qquad V(r) = -\frac{a}{r} + b \longleftarrow$$

En coord. esféricas