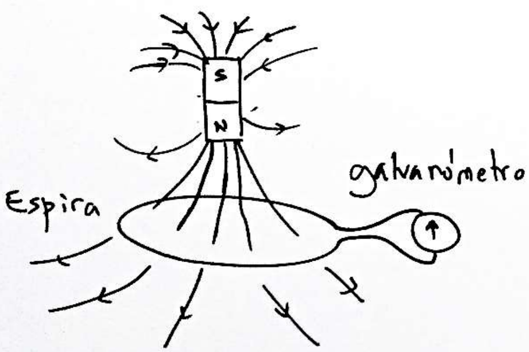
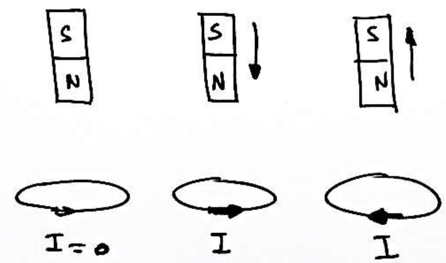
Ley de Inducción de Faraday

Las leyes de Biot y Savart y Ampere describen como la aplicación de un campo eléctrico generan una corriente de carga eléctrico que a su vez genera un campo magnético $\bar{B}$.

La pregunta es si ¿puede un campo magnético $\bar{B}$ puede generar un campo eléctrico $\bar{E}$?

Este efecto fue descubierto por Faraday quien observó que la variación de $\bar{B}$ con el tiempo puede generar un campo eléctrico, lo cual se denomina inducción electromagnética.

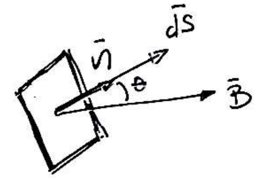




Se observa la generación de una corriente eléctrica I en la espira ante los cambios en $\bar{B}$ que experimenta la espira.

Mas precisamente, en la espira se induce una fem que genera una corriente que depende de la velocidad de cambio del flujo magnético ϕ_B que atraviesa la espira.

Recordemos la definición de flujo magnético,



$$d\phi_B = \bar{B}\cdot d\bar{S} = B\cos\theta\, ds$$

$$d\bar{S} = ds\,\bar{n}$$

$\bar{n} \perp$ a la superficie

Luego

$$\boxed{\phi_B = \iint_S \bar{B}\cdot d\bar{S}}$$

$Wb = T\,m^2$

↑

Weber

Luego la ley de Faraday nos dice que en una espira conductora, la fem $\mathcal{E}$ generada por un cambio en el flujo magnético resulta

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_{\bar{B}}}{dt}$$

Si tenemos N espiras,

$$\boxed{\mathcal{E} = -N\frac{d\phi_{\bar{B}}}{dt}}$$

La expresión para el flujo magnético en una superficie A donde B es uniforme en esa superficie resulta,

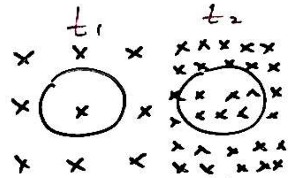
$$\phi_B = BA\cos\theta$$

Veamos, si $\phi_B = B.A.\cos\theta$

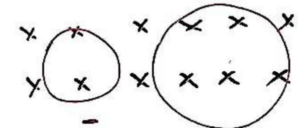
$$\frac{d\phi_B}{dt} = A\cos\theta \frac{dB}{dt} - BA\,\mathrm{sen}\,\theta \frac{d\theta}{dt} + B\cos\theta \frac{dA}{dt}$$

Es decir, se induce una fem si,

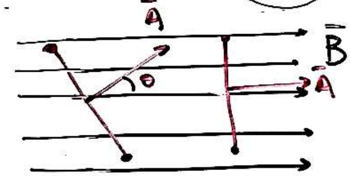
- Se modifica $\bar{B}$ en el tiempo



- Se modifica el área del loop en el tiempo



- Se modifica la posición del loop respecto de $\bar{B}$



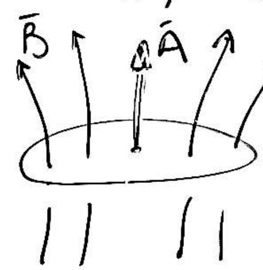
Ley de Lenz

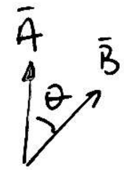
La ley de Lenz nos permite definir la dirección de la corriente. El enunciado de la Ley de Lenz nos dice,

> "La corriente inducida es tal que produce campos magnéticos que tienden a oponerse a los cambios en el flujo magnético que provocan la corriente"

Para ver gráficamente la dirección de la corriente, usamos la regla de la mano derecha.

Supongamos el loop sumergido en un campo $\bar{B}$



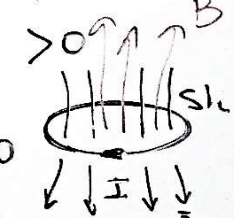


Elegimos la dirección del vector $\bar{A}$.

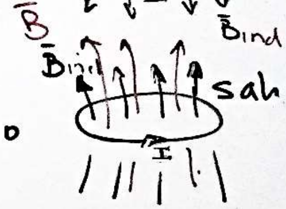
En este caso el sentido de $\bar{B}$ coincide con el sentido de $\bar{A}$ $\Rightarrow$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_{\bar{B}}}{dt}$$

$d\phi_{\bar{B}} = \bar{B}\cdot d\bar{A} > 0$

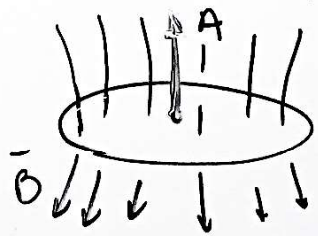


Como $\phi_{\bar{B}} > 0$ si $\phi_{\bar{B}}\uparrow$ $\frac{d\phi_{\bar{B}}}{dt} > 0 \Rightarrow \mathcal{E} < 0$



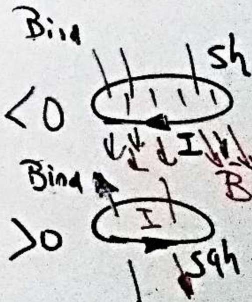
Si $\phi_{\bar{B}}\downarrow$ $\frac{d\phi_{\bar{B}}}{dt} < 0 \Rightarrow \mathcal{E} > 0$

Si elegimos que $\bar{A}$ y $\bar{B}$ tienen distinta dirección



$\phi_{\bar{B}} < 0$ $\phi_{\bar{B}}\uparrow$ (Cada vez más +) $\Rightarrow \frac{d\phi_{\bar{B}}}{dt} > 0 \Rightarrow \mathcal{E} < 0$

$\phi_B < 0$ $\phi_{\bar{B}}\downarrow \Rightarrow \frac{d\phi_{\bar{B}}}{dt} < 0 \Rightarrow \mathcal{E} > 0$

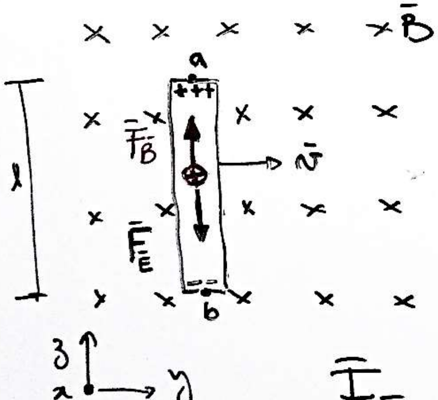


resumiendo,

Φ_B	$\frac{d\Phi_{\bar{B}}}{dt}$	$\mathcal{E}$	I
$+$	$+$	$-$	sh
	$-$	$+$	sah
$-$	$+$	$-$	sh
	$-$	$+$	sah

Otro caso donde se genera una fem a partir de un campo magnético $\bar{B}$

fem en una barra en movimiento.



Las partículas con carga q sienten una fuerza $\bar{F}_{\bar{B}}$, acumulando cargas positivas y negativas en los extremos de la barra generando una fem.

$$\bar{F}_{\bar{B}} = q\,\bar{v} \times \bar{B}$$

mientras que la fuerza del campo eléctrico es,

$$\bar{F}_{\bar{E}} = q\bar{E}$$

cuando las dos fuerzas se cancelan, resulta que,

$$qE = qvB$$

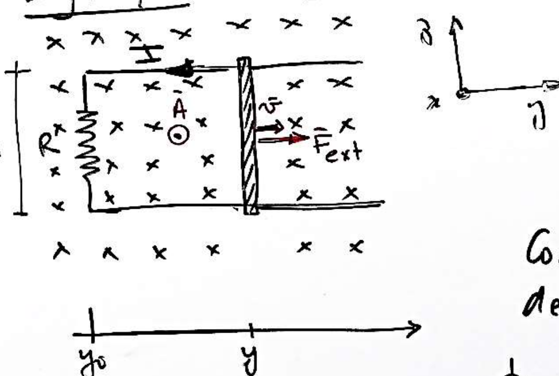
$$\Rightarrow \quad E = vB \qquad \bar{E} = -vB\,\hat{e}_z$$

Asumiendo que E es cte a lo largo de la barra

$$V_a - V_b = -\int_b^a \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\int_b^a -vB\,\hat{e}_z \cdot dz\,\hat{e}_z$$

$$\boxed{V_a - V_b = vBl}$$

Ejemplo $\quad \bar{B} = -B\,\hat{e}_x$



La $\bar{F}_{ext}$ mueve la barra a $\bar{v}$ = cte

$$\bar{v} = v\,\hat{e}_y \qquad \bar{B} = -B\,\hat{e}_x$$

$$\bar{A} = A\,\hat{e}_x$$

Como B es cte en el área de interés,

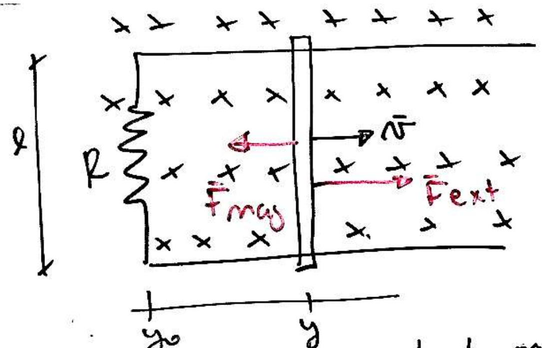
$$\Phi_{\bar{B}} = \iint \bar{B}\cdot d\bar{A} = \iint -B\,\hat{e}_x \cdot dA\,\hat{e}_x$$

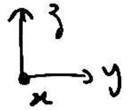
$$\Phi_{\bar{B}} = -BA = -Bl(y - y_0)$$

De acuerdo a la ley de Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\bar{B}}}{dt} = Bl\frac{dy}{dt} = Blv > 0$$ sentido de I sah

$\Rightarrow$ la corriente inducida $\boxed{i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Blv}{R}}$



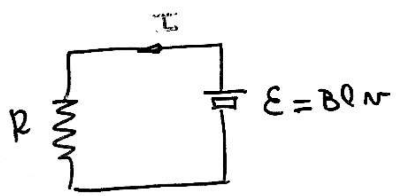


$\bar{B} = -B\hat{e}_x$

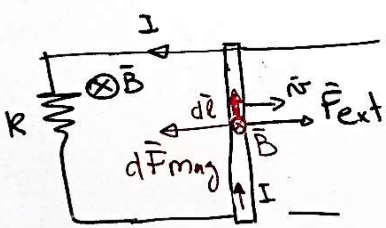
$\bar{v} = v\,\hat{e}_y$

$\mathcal{E} = B\ell v \Rightarrow I = \frac{B\ell v}{R}$

Un circuito equivalente podría ser



Al circular la corriente I por la barra aparece una fuerza magnética. $d\bar{F} = I\, d\bar{\ell} \times \bar{B}$



$\bar{F}_{mag} = -I\ell B\,\hat{e}_y$

$\Rightarrow \bar{F}_{ext} = -\bar{F}_{mag} = I\ell B\,\hat{e}_y$

reemplazando la expresión para la corriente I, $\boxed{\bar{F}_{ext} = \frac{B^2\ell^2 v}{R}\,\hat{e}_y}$

Podemos preguntarnos cual es el trabajo que realiza el agente externo,

$$dW_{ext} = \bar{F}_{ext}\cdot d\bar{\ell}$$

$$dW_{ext} = \frac{B^2\ell^2 v}{R}\,\hat{e}_y \cdot dy\,\hat{e}_y$$

$$W_{ext} = \frac{B^2\ell^2 v}{R}\int_{y_0}^{y} dy = \frac{B^2\ell^2 v}{R}(y-y_0)$$

Luego la energía por unidad de tiempo que gasta el agente externo (potencia) resulta:

$$P = \frac{dW_{ext}}{dt} = \frac{B^2\ell^2 v}{R}\frac{dy}{dt} = \frac{B^2\ell^2 v^2}{R}$$

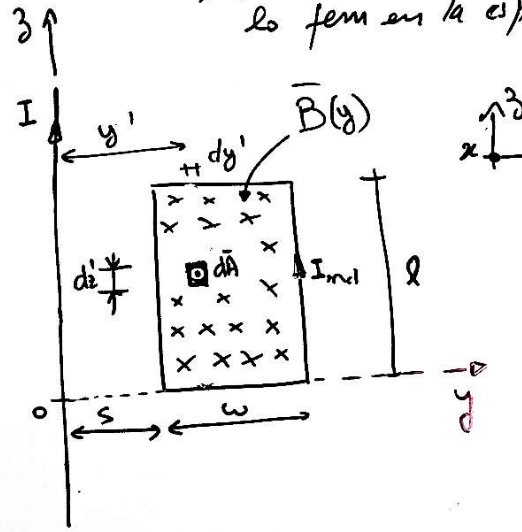
$$P = \frac{B^2\ell^2 v^2}{R}\frac{R}{R} = I^2 R$$

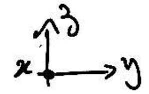
Es decir el trabajo por unidad de tiempo que realiza el agente para mover la barra se disipó por efecto Joule en la resistencia R.

Ejemplo: fem en un loop cerca de un cable.

a) ¿Cuál es $\Phi_{\bar{B}}$ en la espira?

b) Si $I = a + bt$ donde $b > 0$ ¿cuál es la fem en la espira?





Si aplicamos la ley de Ampere para un cable ∞ podemos calcular $\bar{B}$ en el plano yz

$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I_{enc} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y'}$$

en forma vectorial, en el plano yz tenemos que

$$\bar{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y'}\hat{e}_x$$

$$d\bar{A} = dy'\,dz'\,\hat{e}_x$$

$$\Rightarrow \quad d\phi_{\bar{B}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y'}\hat{e}_x \cdot dy'\,dz'\,\hat{e}_x$$

$$\phi_{\bar{B}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^l\int_s^{s+w}\frac{1}{y'}\,dy'\,dz'$$

$$\phi_{\bar{B}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\,l\,\ln\frac{s+w}{s}$$

Si la corriente $I = a + bt$, resulta que

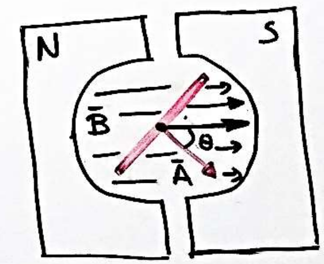
$$\phi_{\bar{B}} = -\mu_0\frac{(a+bt)}{2\pi}\,l\,\ln\frac{s+w}{s}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\phi_{\bar{B}}}{dt} = \frac{\mu_0 b\,l}{2\pi}\ln\left(\frac{s+w}{s}\right)} > 0 \Rightarrow I \text{ sale}$$

Generador (motor)

Una de las aplicaciones más importantes de la generación de una fem a partir de un campo $\bar{B}$ son los generadores y los motores

* un generador convierte energía mecánica en eléctrica
* un motor convierte energía eléctrica en mecánica.



$$\phi_{\bar{B}} = BA\cos\theta$$

$$\theta = \omega t = \frac{2\pi}{T}t$$

$$\frac{d\phi_{\bar{B}}}{dt} = -AB\omega\,\text{sen}\,\omega t$$

Si tenemos N espiras

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\phi_{\bar{B}}}{dt} = NAB\omega\,\text{sen}\,\omega t$$

Si conectamos el generador a un circuito con una resistencia R, tenemos que,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{NBA\omega}{R} \operatorname{sen} \omega t$$

y la potencia entregada

$$P_{elec} = I^2 R = \frac{N^2 B^2 A^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega t}{R}$$

Por otro lado vimos que el torque $\bar{\tau}$ para un dipolo $\bar{\mu}$ en un $\bar{B}$ uniforme es

$$\bar{\tau} = \bar{\mu} \times \bar{B} \qquad \bar{\mu} = NI\bar{A}$$

$$\tau = \mu B \operatorname{sen} \theta = NIAB \operatorname{sen} \omega t$$

reemplazamos la corriente y tenemos,

$$\tau = \frac{N^2 B^2 A^2 \omega}{R} \operatorname{sen}^2 \omega t$$

Por otro lado la potencia mecánica es

$$P_{mec} = \tau \omega \Rightarrow$$

$$P_{mec} = \frac{N^2 B^2 A^2 \omega^2}{R} \operatorname{sen}^2 \omega t = P_{elec}$$

fem como integral del campo eléctrico

Una forma equivalente de entender la inducción de una corriente en un loop, tiene que ver con la generación de un campo $\bar{E}$, responsable del desplazamiento de la carga eléctrica en el loop. Luego si utilizamos la definición de fem,

$$\mathcal{E} = \frac{dw}{dq}$$

podemos calcular el trabajo para hacer circular la carga eléctrica, es decir

$$dw = \mathcal{E}\, dq = \oint_\Gamma \bar{F}_{\bar{E}} \cdot d\bar{l}$$

en nuestro caso $\bar{F}_{\bar{E}}$ es la fuerza sobre un dq

luego

$$\mathcal{E}\, dq = dq \oint \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad \therefore$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \oint_\Gamma \bar{E} \cdot d\bar{l}}$$

Observación: A diferencia de lo que sucede en "electrostática" $\oint_\Gamma \bar{E} \cdot d\bar{l} \neq 0$!!

Ahora bien,

$$\mathcal{E} = \oint_\Gamma \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{d\phi_{\bar{B}}}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \bar{B} \cdot d\bar{S}$$

Si es el campo $\bar{B}$ quien varía c/el tiempo

$$= -\iint_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S}$$

Si utilizamos el teorema de Stokes,

$$\oint_\Gamma \bar{E} \cdot d\bar{l} = \iint_S \nabla \times \bar{E} \cdot d\bar{S}$$

$$\Rightarrow \quad \iint_S \nabla \times \bar{E} \cdot d\bar{S} = -\iint_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}}$$

Esto nos dice que tenemos que el campo $\bar{E}$ puede ser generado por carga eléctrica o también por una variación del campo $\bar{B}$ en el tiempo.