Ondas electromagnéticas en el vacío

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío para los campos $\bar{E}$ y $\bar{B}$ en el vacío en ausencia de cargas eléctricas ($\rho=0$) y de corrientes estacionarias ($I=0$), resultan,

1) $\nabla\cdot\bar{E}=0$ 3) $\nabla\times\bar{E}=-\dfrac{\partial\bar{B}}{\partial t}$

2) $\nabla\cdot\bar{B}=0$ 4) $\nabla\times\bar{B}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\bar{E}}{\partial t}$

Estas ecuaciones diferenciales son de 1er orden, sin embargo $\bar{E}$ y $\bar{B}$ están acoplados en las ecuaciones 3 y 4.

Para desacoplar $\bar{E}$ y $\bar{B}$ aplicamos el rotor al $\nabla\times\bar{E}$ y al $\nabla\times\bar{B}$ luego,

$$\nabla\times(\nabla\times\bar{E})=\nabla(\underbrace{\nabla\cdot\bar{E}}_{=0})-\nabla^2\bar{E}=-\nabla\times\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}$$

como el $\nabla\times\bar{B}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\bar{E}}{\partial t}$ $(\bar{j}=0)$

① $$\boxed{\nabla^2\bar{E}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2}}$$

al ∇^2 actúa sobre cada componente de $\bar{E}$

De la misma manera aplicando el rotor al $\nabla\times\bar{B}$ tenemos que,

$$\nabla\times(\nabla\times\bar{B})=\nabla(\underbrace{\nabla\cdot\bar{B}}_{=0})-\nabla^2\bar{B}=\mu_0\varepsilon_0\nabla\times\left(\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}\right)$$

$$-\nabla^2\bar{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\nabla\times\bar{E}}_{-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{\nabla^2\bar{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\bar{B}}{\partial t^2}}$$ ②

Hemos obtenido una ecuación diferencial para $\bar{E}$ y otra p/$\bar{B}$ aunque son de 2do orden.

Observar que $\bar{E}$ y $\bar{B}$ son vectores, es decir las ecuaciones ① y ② son válidas componente a componente, es decir,

$$\nabla^2B_x=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2B_x}{\partial t^2}\ ;\ \nabla^2B_y=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2B_y}{\partial t^2}\ ;\ \nabla^2B_z=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2B_z}{\partial t^2}$$

donde $B_i(x,y,z,t)$ $i=x,y,z$

o mas aún para cada componente,

$$\frac{\partial^2B_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2B_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2B_i}{\partial z^2}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2B_i}{\partial t^2}\quad i=x,y,z$$

Ambas ecuaciones

$$\nabla^2\bar{E} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} \quad y \quad \nabla^2\bar{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\bar{B}}{\partial t^2}$$

Son ecuaciones diferenciales del tipo

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad f(x,y,z,t)$$

cuyas soluciones son ecuaciones de onda que se propagan a la velocidad v, en nuestro caso,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8.85\,10^{-12}\,\frac{C^2}{N m^2}\;4\pi\,10^{-7}\,\frac{N}{A^2}}} \approx 3\times10^{8}\,\frac{m}{s}$$

es decir la velocidad de la luz!!

→ ¿El campo eléctrico $\bar{E}$ y magnético $\bar{B}$ se presentan en forma de onda?

→ ¿su velocidad es la velocidad de la luz?

→ ¿la luz es una onda electromagnética?

Hertz descubre las ondas de radio en 1887 y verificó estas predicciones.

Repaso sobre las propiedades de las funciones de onda

Podemos reducir la ecuación diferencial para una onda en 1 dimensión, que resulta,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad ③$$

es decir que $f = f(z,t)$

Se puede ver muy fácilmente que la solución "más general" a la ecuación diferencial ③ son funciones de la forma,

$$f(z,t) = \overset{+z}{g}(z - vt) + \overset{-z}{h}(z + vt)$$

donde g representa una onda q' se propaga en la dirección $+z$ y h en la dirección $-z$.

Veamos, si $u = z - vt$ y $r = z + vt$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = -v\frac{\partial g}{\partial u} + v\frac{\partial h}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + v^2\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}$$

puede verse que:

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

Ondas sinusoidales

De todas las funciones que son solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

las funciones sinusoidales del tipo,

$$f(z,t) = A \cos(k(z - vt) + \delta)$$

Amplitud de la onda

vector de onda relacionado con la longitud de onda λ

fase cte

En lo que sigue vamos a considerar a $\delta = 0$, es decir que $f(z,t) = A \cos(kz - kvt)$

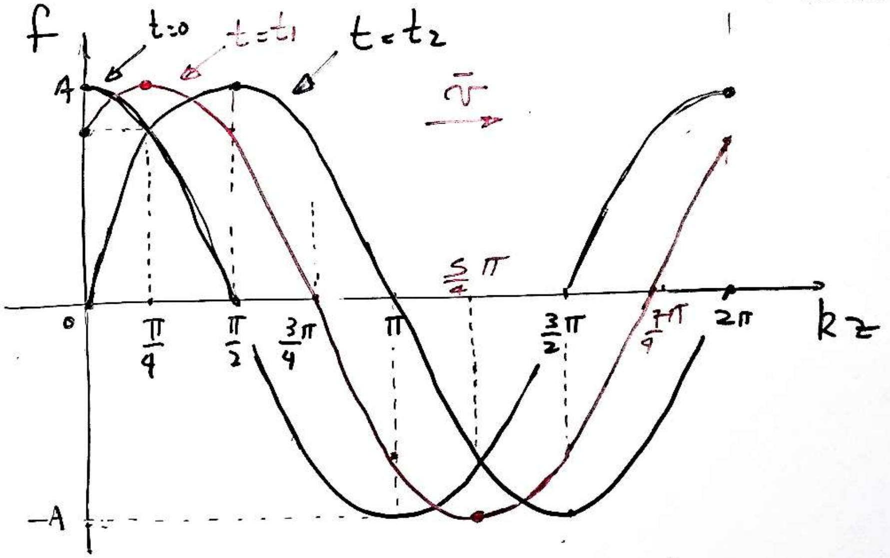
Para $t=0$ $\quad f(z,0) = A \cos(kz)$

para $t=t_1$ / $kvt_1 = \pi/4$

$$f(z,t_1) = A \cos(kz - \pi/4)$$

para $t=t_2$ / $kvt_2 = \pi/2$

$$f(z,t_2) = A \cos(kz - \pi/2)$$



Podemos ver que la onda avanza en la disercion +z

* Veamos, $kvt_2 - kvt_1 = kv(t_2 - t_1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\pi}{4kv}$$

por otro lado,

$$kz_2 - kz_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \Delta z = \frac{\pi}{4k}$$

$\Rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\pi 4kv}{4k\pi} = v$: es la velocidad de la onda.

* El periodo de la onda corresponde a un avance de $kz = 2\pi$, en este caso z corresponde a la longitud de onda λ, luego

$$k\lambda = 2\pi \Rightarrow \boxed{k = 2\pi/\lambda}$$

vector de onda

luego $T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2\pi}{kv}$ (periodo de tiempo) finalmente la frecuencia angular

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}} k v = k v$$

también $\omega = 2\pi \nu \Rightarrow \nu = \frac{k v}{2\pi}$

En general las ecuaciones se escriben utilizando la frecuencia angular ω, es decir,

$$f(z,t) = A \cos(kz - \omega t)$$ onda que se desplaza en la dirección $+z$

Si queremos una onda que se desplaza en la dirección $-z$ resulta

$$f(z,t) = A \cos(kz + \omega t)$$ onda que se desplaza en la dirección $-z$

En este caso si escribimos, $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

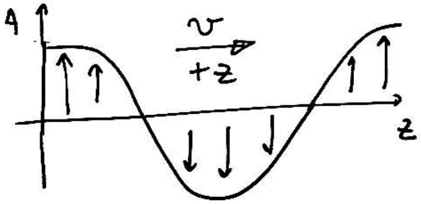
$$f(z,t) = A \cos(-kz - \omega t) = A \cos(-(kz+\omega t)) =$$

$$= A \cos(kz + \omega t)$$ se propaga en la dirección $-z$

Observar que obtenemos una onda que viaja en la dirección opuesta, cambiando el signo de k.

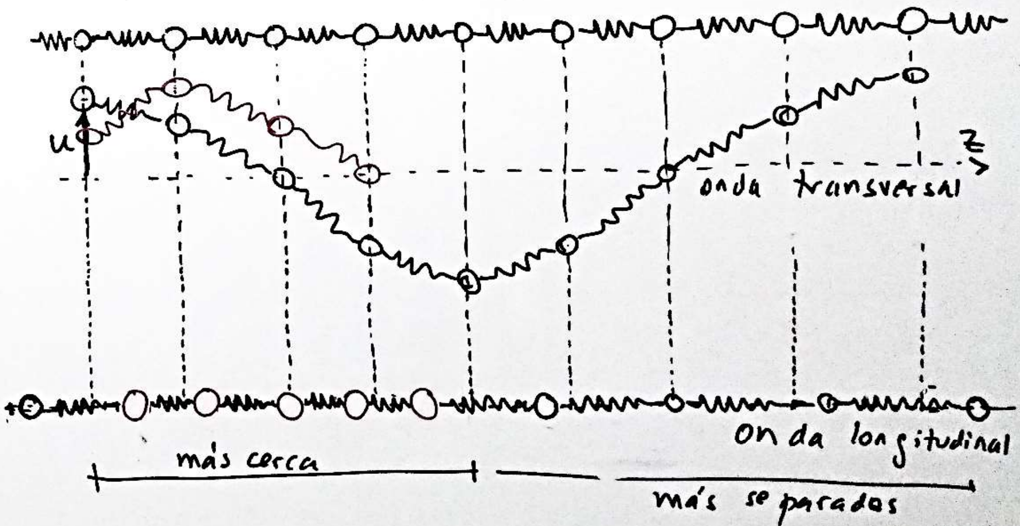
Polarización

La onda que estamos describiendo, se propaga en la dirección z, sin embargo, la amplitud de desplazamiento es perpendicular a z.

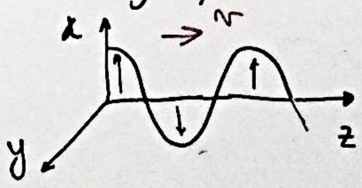


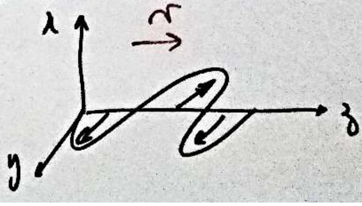
este tipo de onda se denomina "transversal"

Si la propagación y el desplazamiento es en la misma dirección se denomina "longitudinal"



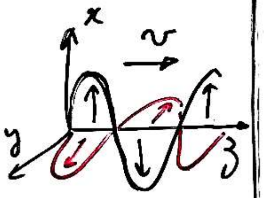
Veamos el ejemplo de los desplazamientos en una cuerda,





Para indicar la polarización de la onda agregamos un vector, de manera que si la onda se propaga en $+z$, es transversal y los desplazamientos son en la dirección x, resulta,

$$\bar{f}(z,t) = A \cos(kz-\omega t)\,\hat{e}_x$$



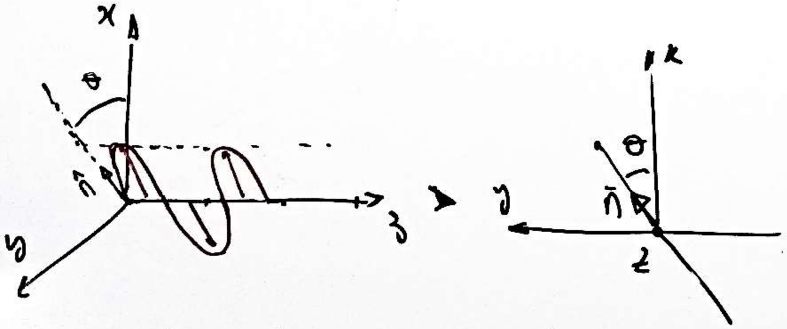
o

$$\bar{f}(z,t) = A \cos(kz-\omega t)\,\hat{e}_y$$

si los desplazamientos son en la dirección y

De manera más general podemos introducir el versor $\bar{n}$ que indica la dirección de polarización de manera que,

$$\bar{f}(z,t) = A \cos(kz-\omega t)\,\hat{n}$$

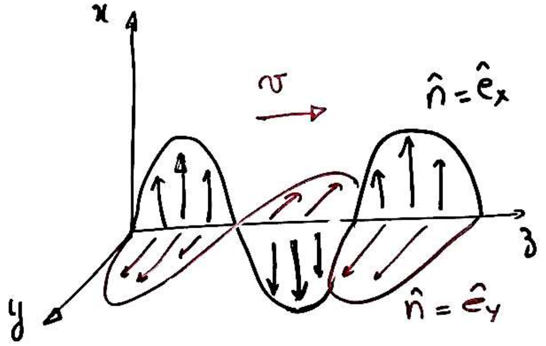


donde $\bar{n}$ define la dirección del desplazamiento

$$\hat{n} \perp \hat{e}_z \Rightarrow \hat{n}\cdot\hat{e}_z = 0$$

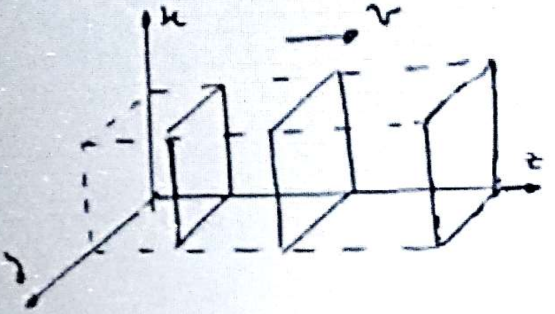
$$\hat{n} = \cos\theta\,\hat{e}_x + \operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_y$$

$$\therefore\ \bar{f}(z,t) = A\cos\theta\cos(kz-\omega t)\,\hat{e}_x + A\operatorname{sen}\theta\cos(kz-\omega t)\,\hat{e}_y$$



Ondas electromagnéticas planas y monocromáticas

A continuación vamos a hablar de ondas sinusoidales de frecuencia angular ω y longitud de onda $\lambda = cte$ (monocromáticas)
Por otro lado si la onda se propaga, supongamos en la dirección $\hat{z}$ y no depende de x y de y se denomina "onda plana"



En este caso el campo $\bar{E}$ y el campo $\bar{B}$ tienen el mismo valor en un plano ⊥ al eje z.

Luego,

$$\bar{E}(z,t) = \bar{E}_0 \cos(kz - wt + \delta_{\bar{E}}) = E_0 \cos(kz - wt + \delta_{\bar{E}})\, \hat{n}_{\bar{E}}$$

$$\bar{B}(z,t) = \bar{B}_0 \cos(kz - wt + \delta_{\bar{B}}) = B_0 \cos(kz - wt + \delta_{\bar{B}})\, \hat{n}_{\bar{B}}$$

tanto E_0 como B_0 no dependen de x, y o z es decir que son constantes.

Lo que nos queda verificar es que estas ecuaciones deben cumplir con las ecuaciones de Maxwell.

A continuación suponemos $\delta_{\bar{E}} = 0$.

Comenzamos calculando

$$\nabla \cdot \bar{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \left[E_{0x} \cos(kz - wt)\,\hat{e}_x + E_{0y} \cos(kz - wt)\,\hat{e}_y + E_{0z} \cos(kz - wt)\,\hat{e}_z \right] = 0$$

$$\frac{\partial E_{0z} \cos(kz - wt)}{\partial z} = -E_{0z}\, k\, \operatorname{sen}(kz - wt) \underset{\overset{\uparrow}{\forall t}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{0z} = 0}$$

De la misma manera puede demostrarse que,

$$\boxed{B_{0z} = 0}$$

por otro lado, también debe cumplirse que

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

luego

$$\nabla \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{0x} \cos(kz - wt) & E_{0y} \cos(kz - wt) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\nabla \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{ox}\cos(kz-wt) & E_{oy}\cos(kz-wt) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= E_{oy}\, k \,\operatorname{sen}(kz-wt)\,\hat{e}_x - E_{ox}\, k\, \operatorname{sen}(kz-wt)\,\hat{e}_y = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$= -wB_{ox}\operatorname{sen}(kz-wt+\delta_{\bar{B}})\,\hat{e}_x - B_{oy}\, w \operatorname{sen}(kz-wt+\delta_{\bar{B}})\,\hat{e}_y$$

$$\Rightarrow \quad E_{oy}\, k \operatorname{sen}(kz-wt) = -w B_{ox}\operatorname{sen}(kz-wt+\delta_{\bar{B}})$$

$$-E_{ox}\, k \operatorname{sen}(kz-wt) = -w B_{oy}\operatorname{sen}(kz-wt+\delta_{\bar{B}})$$

para que se cumplan estas igualdades

$$\delta_{\bar{B}} = 0 = \delta_{\bar{E}} \quad \rightarrow \bar{E} \text{ y } \bar{B} \text{ están en fase}$$

$$E_{oy} = -\frac{w}{k}B_{ox}$$

$$E_{ox} = \frac{w}{k}B_{oy}$$

A continuación vamos a verificar que este resultado es equivalente a la condición

$$\boxed{\bar{B} = \frac{k}{w}\hat{e}_z \times \bar{E}} \qquad ①$$

Si hacemos el producto vectorial,

$$\frac{k}{w}\hat{e}_z \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ E_{ox}\cos(kz-wt) & E_{oy}\cos(kx-wt) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{k}{w}E_{oy}\cos(kz-wt)\,\hat{e}_x + \frac{k}{w}E_{ox}\cos(kz-wt)\,\hat{e}_y$$

$$= B_{ox}\cos(kz-wt)\,\hat{e}_x + B_{oy}\cos(kz-wt)\,\hat{e}_y$$

vemos que $E_{oy} = -\frac{w}{k}B_{ox}$ y

$$E_{ox} = \frac{w}{k}B_{oy}$$

es decir que verificamos la ecuación ① donde $\hat{e}_z$ proviene del hecho q' la onda se propaga en $+z$, si se propaga en la dirección x, hay que cambiar el versor $\hat{e}_z \longrightarrow \hat{e}_x$.

Este resultado nos dice que $\bar{E}$ y $\bar{B}$ están en fase pero además son perpendiculares entre sí.

Por otro lado,

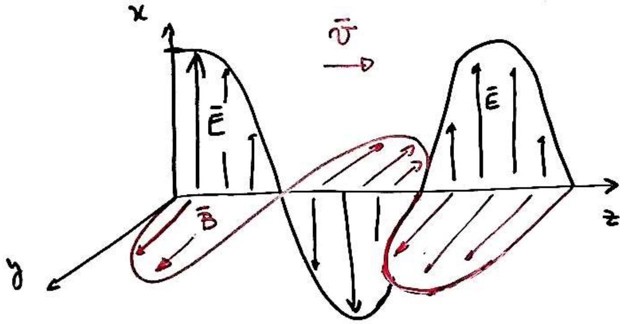
$$|\bar{B}_0| = (B_{oy}^2 + B_{ox}^2)^{1/2} = \left(\left(\frac{k}{w}E_{oy}\right)^2 + \left(\frac{k}{w}E_{ox}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad |\bar{B}_0| = \frac{k}{w}|\bar{E}_0|$$

como $\frac{k}{w} = \frac{\cancel{2\pi}}{\lambda}\frac{T}{\cancel{2\pi}} = \frac{1}{v} = \frac{1}{c}$ ← velocidad de la luz.

es decir $|\bar{B}| = \frac{1}{c}|\bar{E}|$

Finalmente, una onda plana que se propaga en la dirección $+z$ resulta



Energía en ondas electromagnéticas

De acuerdo a lo que vimos en clases pasadas, la energía por unidad de volumen cuando tenemos un campo eléctrico $\bar{E}$ y un campo magnético $\bar{B}$ es,

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)$$

en el caso de una onda plana

$$B^2 = \frac{E^2}{c^2} = \mu_0\varepsilon_0 E^2 \qquad \frac{1}{c^2} = \mu_0\varepsilon_0$$

$$\rightarrow \boxed{u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \varepsilon_0 E^2\right) = \varepsilon_0 E^2}$$

energía total por unidad de volumen de onda electromagnética

$$\therefore\ u = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz-\omega t)$$

a medida que la onda se desplaza, transporta energía electromagnética. Como vimos la clase pasada, el flujo de energía por unidad de tiempo y de área viene dado por el vector de Poynting

$$\bar{S} = \frac{1}{\mu_0}\bar{E}\times\bar{B}$$

Luego para una onda propagando en la dirección $+z$, suponiendo que $\bar{E}$ esta en la dirección $\hat{e}_x$ y $\bar{B}$ en la dirección $\hat{e}_y$, resulta,

$$\bar{S} = \frac{1}{\mu_0}E_0\cos(kz-\omega t)\,\frac{E_0}{c}\cos(kz-\omega t)\,\hat{e}_z$$

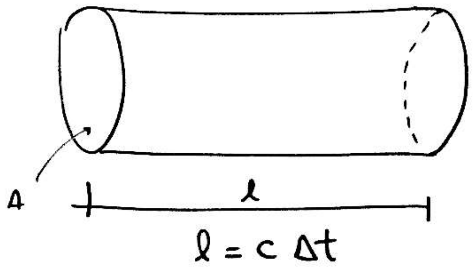
Como $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow \frac{1}{\mu_0} = \varepsilon_0 c^2$

$$\bar{S} = c\,\underbrace{\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz-\omega t)}_{u}\,\hat{e}_z$$

$$\boxed{\bar{S} = c\,u\,\hat{e}_z}$$

Si tenemos un determinado volumen, la energía en ese volumen resulta

$$En = \underbrace{\overbrace{C\Delta t}^{\ell} A}_{v}\, u$$



$$\Rightarrow \frac{En}{\Delta t\, A} = c u = |\bar{S}|$$

El módulo del vector de Poynting es la energía por unidad de tiempo y de área que transporta la onda electromagnética.