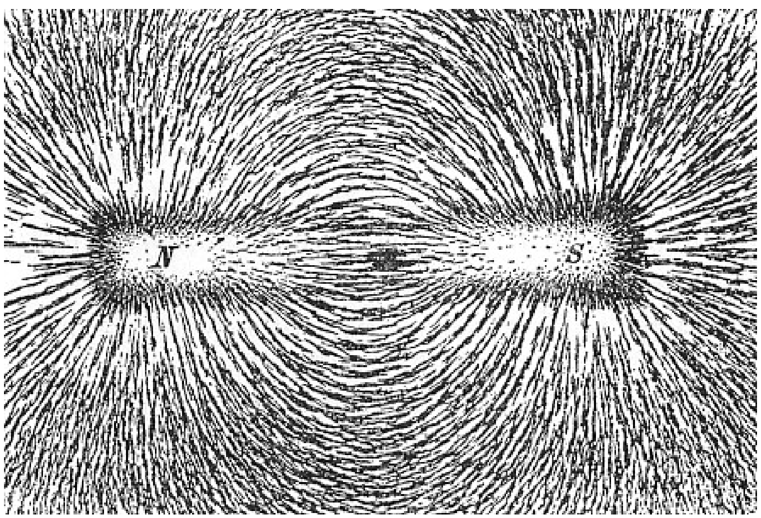
Campo Magnético

Como mencionamos la primera clase, el electromagnetismo es el resultado de la coexistencia de lo que en los inicios se consideraban fenómenos separados, la electricidad, resultado de la existencia de las “cargas eléctricas”, y del magnetismo, producto del efecto de algunos minerales , magnetita, sobre el hierro. Con el tiempo pudo demostrarse la interrelación entre estos dos efectos, hasta desembocar en la Teoría de Maxwell.

En analogía a lo que sucede con las cargas eléctricas donde se postula la interacción del tipo

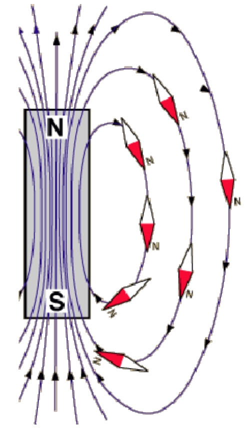
Carga eléctrica ⇔ campo eléctrico ⇔ carga eléctrica.

Se propone que la interacción “magnética” es a través de un “campo magnético” que lo identificamos con la letra $\overline{\boldsymbol{B}}$.

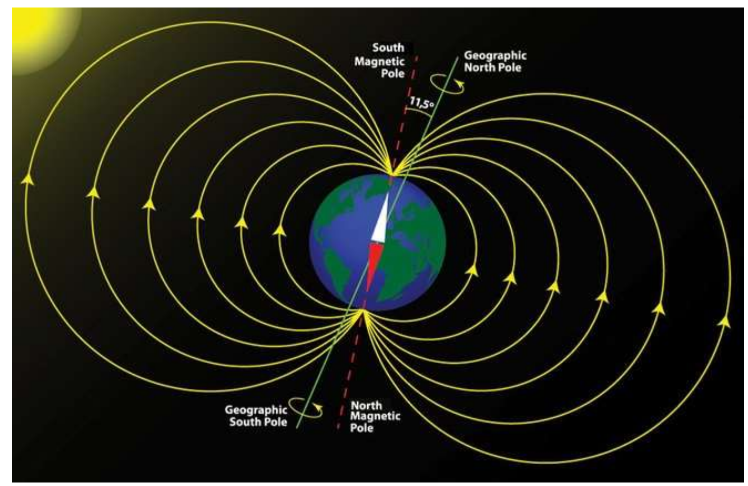


Distribución de limaduras de Fe (hierro) alrededor de un imán

En el caso de $\overline{\boldsymbol{B}}$ es posible visualizar las líneas del campo magnético. Por ejemplo si tenemos una barra magnética y una brújula, y desplazamos la brújula alrededor de la barra magnética veremos que la brújula se alinea de una manera que define las líneas de campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$.



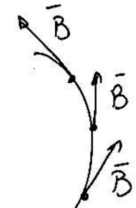
Luego, se considera que la barra magnética está formada por un polo Norte desde donde parten las líneas de campo magnético y un polo Sur hacia donde llegan las líneas de campo $\overline{\boldsymbol{B}}$.



Líneas de campo magnético de la Tierra

Al igual que hicimos con el campo eléctrico $\bar{E}$, las propiedades de las líneas de campo magnético son:

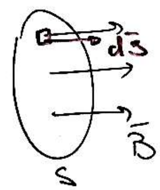
1) la tangente a una línea de campo en un punto indica la dirección de $\bar{B}$



2) Se dibujan de manera q' el número de líneas de campo por unidad de área es proporcional a $\bar{B}$

3) Definimos el flujo de $\bar{B}$ como

$$\Phi_{\bar{B}} = \iint_S \bar{B} \cdot d\bar{S}$$



Observación: La barra magnética tiene dos polo el polo Norte (N) y el polos Sur (S)

1) Se observa repulsión entre los polos.

$$N-N \quad y \quad S-S$$

2) Se observa una fuerza atractiva entre los polos $N-S$

3) Si partimos la barra a la mitad se obtienen dos barras cada una de ellas con un polo Norte y un polo Sur

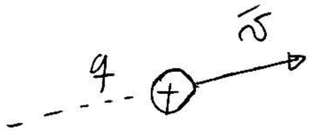
Es decir no existe el monopolo magnético a diferencia de lo que sucede en electrostática.

Como consecuencia no podemos usar una definición equivalente a la que usamos para el campo $\bar{E}$ donde $\bar{E} = \frac{\bar{F}_e}{q}$

Definición de campo magnético

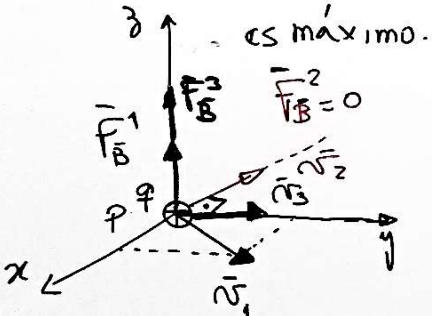
Para una partícula cargada q en movimiento, en cualquier punto del espacio, existen dos fuerzas, una debido a un campo $\bar{E}$, que es independiente de la trayectoria de q y otra fuerza, la fuerza magnética, que depende de la trayectoria.

Para una carga eléctrica con velocidad $\bar v$



$$|\bar F_{\bar B}| \propto q\,|\bar v|$$

* También se encuentra que la fuerza magnética $\bar F_{\bar B} \perp \bar v$
* Hay una dirección de $\bar v$ donde $\bar F_{\bar B} = 0$ se considera esta dirección la dirección del campo magnético.
* Si movemos q perpendicular a esta dirección, $\bar F_{\bar B}$ es máxima.

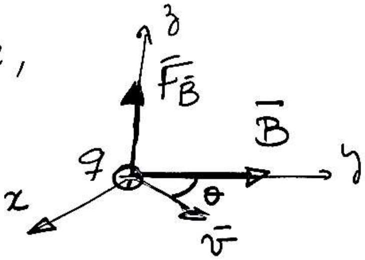


* Cuando cambia el signo de la carga cambia el sentido de $\bar F_{\bar B}$

Luego es posible definir el campo magnético $\bar B$ de manera que se cumplan todas estas observaciones si resulta que

$$\boxed{\bar F_{\bar B} = q\,\bar v \times \bar B}$$

gráficamente,



Es decir que la fuerza magnética resulta:

$$|\bar F_{\bar B}| = |q|\,|\bar v|\,|\bar B| \operatorname{sen} \underset{\widehat{\bar v \bar B}}{}\quad (\operatorname{sen}\theta)$$

en el sistema internacional las unidades del campo magnético son,

$$\frac{N}{\frac{m}{s}\,C} = \frac{N}{m\,A} = T = 10^4 \text{ Gauss}$$

Observación: $\bar F_{\bar B}$ es siempre $\perp$ a $\bar v$ y $\bar B$, por lo tanto no puede modificar la velocidad $|\bar v|$ de la partícula, es decir su energía cinética. No puede acelerar o frenar la partícula, es decir no puede realizar trabajo.

$$dW = \underbrace{q\,\bar v \times \bar B}_{\bar F_{\bar B}} \cdot d\bar l = q\,\bar v \times \bar B \cdot \overbrace{\bar v\,dt}^{d\bar l} =$$
$$= q\,(\bar v \times \bar v) \cdot \bar B\,dt = 0$$

Es decir $\bar F_{\bar B}$ no realiza trabajo pero puede modificar la trayectoria de la partícula.

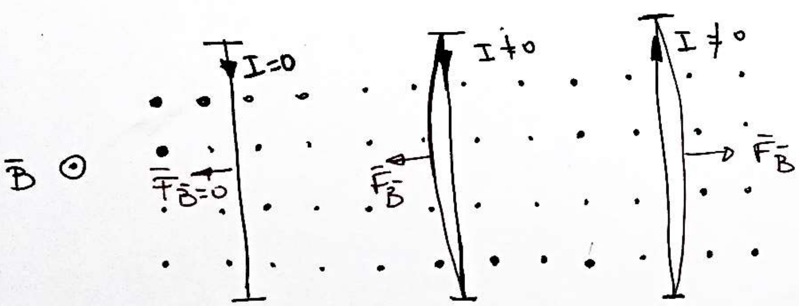
Observación: Si tenemos un campo $\bar{E}$ y un campo $\bar{B}$, la fuerza total sobre la partícula cargada es:

$$\boxed{\bar{F} = q\,(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})}$$

Ecuación de Lorentz.

Fuerza magnética sobre una corriente

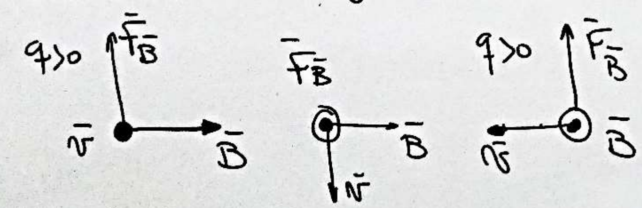
Recordemos que una corriente son cargas eléctricas en movimiento, por lo tanto si están sumergidas en un campo $\bar{B}$, perciben una fuerza $\bar{F}_{\bar{B}}$.



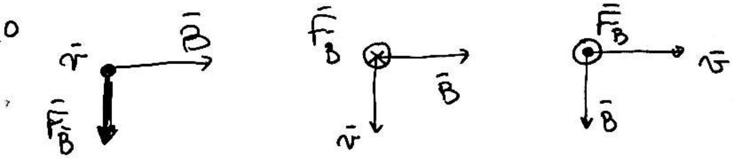
El sentido de la fuerza magnética,

$$\bar{F}_B = q\,\bar{v} \times \bar{B}$$

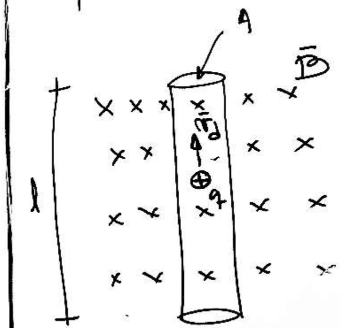
Se obtiene usando la regla de la mano derecha.



Si $q<0$



Para calcular la fuerza de origen magnético en un cable por el que circula una corriente I, consideramos un segmento de longitud l y área A, mientras q' $\bar{B}$ apunta hacia el interior del pizarrón



La carga total en este segmento resulta:

$$Q_T = q\,n\,\underbrace{A\,l}_{\text{volumen}}$$

n: densidad de partículas por unidad de volumen.

luego

$$\bar{F}_{\bar{B}} = Q_T\,\bar{v}_d \times \bar{B} = \overbrace{q\,n\,A\,l}^{Q_T}\,\bar{v}_d \times \bar{B}$$

$\bar{J}$

como $\quad \bar{J} = q\,n\,\bar{v}_d$

y además $\quad \bar{v}_d = v_d\,\hat{e}_l \quad$ ← versor en la dirección de $\bar{v}_d$

$$\Rightarrow \quad \bar{F}_{\bar{B}} = |\bar{J}|\,A\,l\,\hat{e}_l \times \bar{B}$$

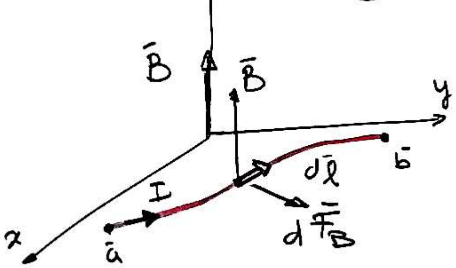
$$\therefore \quad \boxed{\bar{F}_{\bar{B}} = I\,\bar{l} \times \bar{B}}$$

$\bar{l}$: vector de longitud l dirigido en la dirección de la corriente eléctrica I

https://www.youtube.com/watch?v=_dvYfuFtTzU

Si tenemos un cable de forma arbitraria, la fuerza sobre el cable será la suma de las fuerzas sobre cada segmento, es decir:

$\bar{B} = B\hat{e}_z$



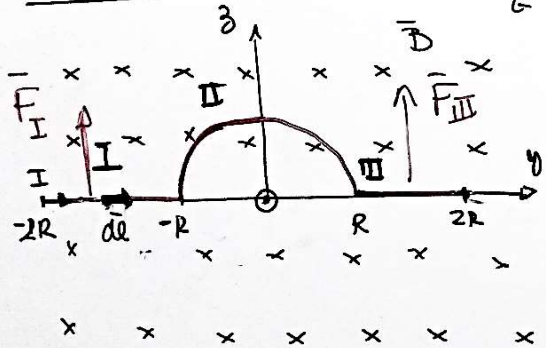
$$d\bar{F}_B = I\, d\bar{l} \times \bar{B}$$

luego la fuerza total resulta:

$$\boxed{\bar{F}_{\bar{B}} = I \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} d\bar{l} \times \bar{B}}$$

Ejemplo:

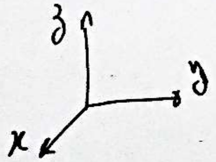
¿Cuál es la fuerza sobre el cable?



$\bar{B} = -B\hat{e}_x$

$-2R \leq y \leq -R \qquad d\bar{l} = dy\,\hat{e}_y$

$$\bar{F}_I = -I \int_{-2R}^{-R} \underbrace{dy\,\hat{e}_y}_{d\bar{l}} \times B\,\hat{e}_x$$



$$\bar{F}_I = -IB\,(-R+2R)\,(-\hat{e}_z)$$

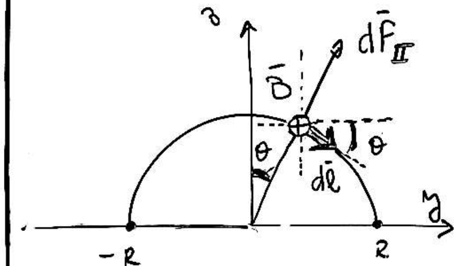
$$\bar{F}_I = IBR\,\hat{e}_z$$

Si $R \leq y \leq 2R \qquad d\bar{l} = dy\,\hat{e}_y$

$$\bar{F}_{III} = I \int_R^{2R} dy\,\hat{e}_y \times (-B\hat{e}_x)$$

$$= -IB\,\underbrace{(2R-R)}_{R}\,(-\hat{e}_z) = IBR\,\hat{e}_z$$

$-R \leq y \leq R$



$$d\bar{F}_{II} = I\, d\bar{l} \times \bar{B} =$$

$$= I\,(dl\cos\theta\,\hat{e}_y - dl\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_z) \times \bar{B}$$

$$= I\,(R\,d\theta\cos\theta\;\hat{e}_y \times (-B\hat{e}_x) -$$

$$- R\,d\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\;\hat{e}_z \times (-B\hat{e}_x)) =$$

$dl = R\,d\theta$

como $\hat{e}_y \times \hat{e}_x = -\hat{e}_z$

$\hat{e}_z \times \hat{e}_x = \hat{e}_y$

tenemos que:

$$d\bar{F}_{II} = IRB\cos\theta\,d\theta\;\hat{e}_z + IRB\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\;\hat{e}_y$$

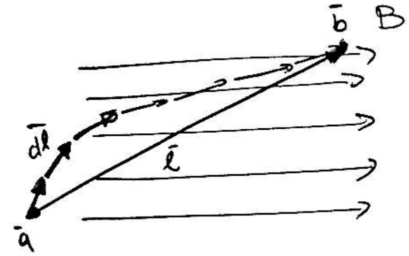
$$\bar{F}_{II} = IRB \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta\;\hat{e}_z + IRB \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\;\hat{e}_y$$

$$= IRB\;\underbrace{\mathrm{sen}\,\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{2}\;\hat{e}_z + IRB\;\underbrace{(-\cos\theta)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{=0}\;\hat{e}_y$$

$$\bar{F}_{II} = 2IRB\;\hat{e}_z$$

$$\therefore\; \bar{F}_T = \bar{F}_I + \bar{F}_{II} + \bar{F}_{III} = \boxed{I\,4RB\,\hat{e}_z}$$

Veamos un cable como el de la figura

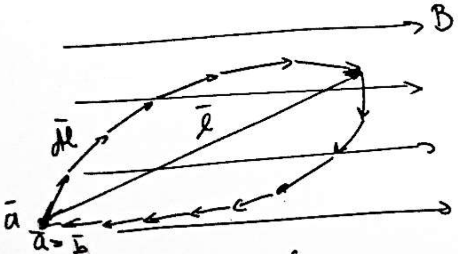


$$\bar{F}_B = I\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \bar{d\ell}\times\bar{B}$$

$$= I\,\Big(\underbrace{\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \bar{d\ell}}_{\bar{\ell}}\Big)\times\bar{B}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\bar{F}_B = I\,\bar{\ell}\times\bar{B}}$$

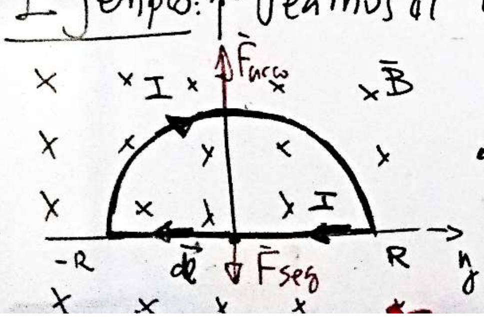
Supongamos ahora un loop cerrado, es decir $\bar{a}=\bar{b}$

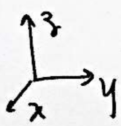


$$\bar{F}_B = I\Big(\underbrace{\oint_{\bar{a}}^{\bar{a}} \bar{d\ell}}_{=0}\Big)\times\bar{B} = 0$$

Es decir la fuerza magnética sobre un loop de corriente en un campo magnético <u>uniforme</u> es nula $\boxed{\bar{F}_B=\bar{0}}$

Ejemplo: Veamos el caso de un loop semicircular





$\bar{B} = -B\hat{e}_x$

En el arco de radio R, la fuerza ya la calculamos anteriormente, es decir:

$$\bar{F}_{arco} = 2IRB\,\hat{e}_z$$

Veamos en el segmento recto $-R\le y\le R$

$$d\bar{F}_{seg} = I\,\bar{d\ell}\times\bar{B} = I\ \ dy\,\hat{e}_y\times(-B\hat{e}_x)$$

$\bar{d\ell} = -d\ell\,\hat{e}_y = dy\,\hat{e}_y$ $\quad \bar{d\ell}\ \ \hat{e}_y$

$$\bar{F}_{seg} = IB\int_R^{-R} dy\,\hat{e}_z = IB\,(-R-R)\,\hat{e}_z$$

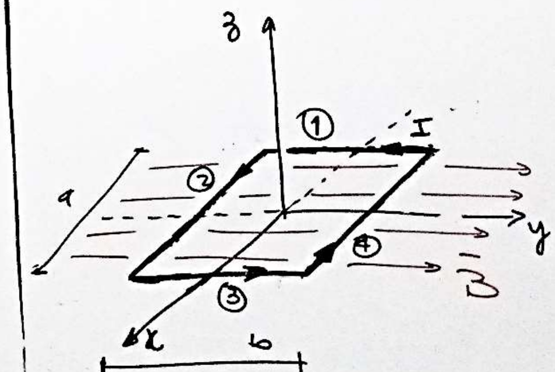
$$= -2IBR\,\hat{e}_z$$

$\hat{e}_y\times\hat{e}_x = -\hat{e}_z$

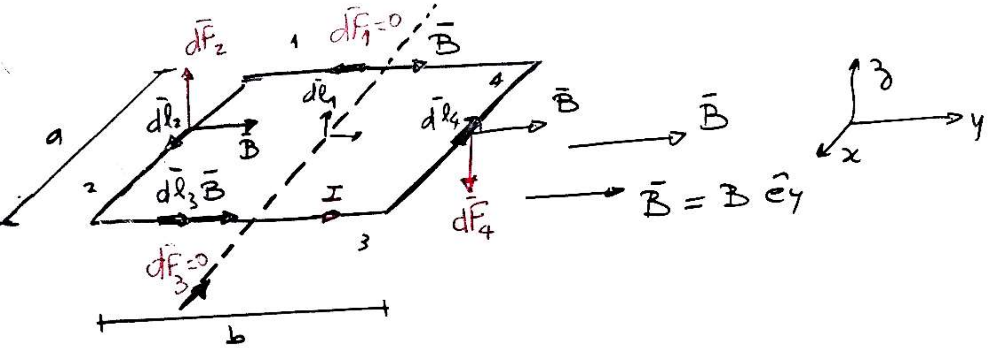
$$\boxed{\bar{F}_T = \bar{F}_{arco}+\bar{F}_{seg} = \bar{0}}$$

<u>Torque sobre un loop de corriente.</u>

Si bien $\bar{F}_{Loop}=0$, resulta que $\tau_{Loop}\neq 0$.



$\bar{B} = B\,\hat{e}_y$



Podemos ver que

$$\bar{F}_1 = I \int \boxed{d\bar{l}_1 \times \bar{B} = 0}$$

$d\bar{l}_1 // \bar{B}$

$$\boxed{\bar{F}_3 = 0}$$

$d\bar{l}_2 = dx\,\hat{e}_x$

$$\boxed{\bar{F}_2 = I \int d\bar{l}_2 \times \bar{B}} = I \int_{-\frac{a}{2}}^{a/2} dx\,\hat{e}_x \times B\,\hat{e}_y$$

$$= IB \int_{-a/2}^{a/2} dx\,\hat{e}_z = \boxed{IBa\,\hat{e}_z}$$

$\hat{e}_x \times \hat{e}_y = \hat{e}_z$

$$\boxed{\bar{F}_4 = -IBa\,\hat{e}_z}$$

Nuevamente la fuerza neta

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 = \bar{0}$$

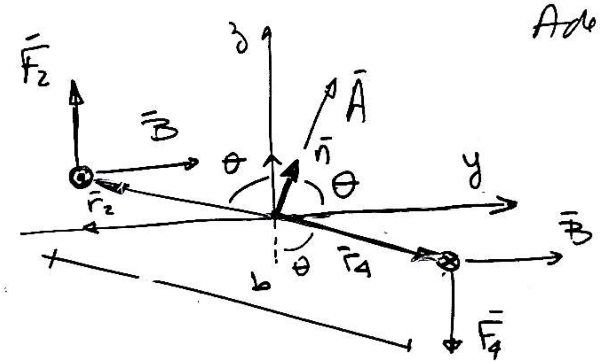
Sin embargo $\bar{F}_2$ y $\bar{F}_4$ producen un torque $\bar{\tau}$ que haría rotar la espira sobre el eje x.

El torque respecto de la espira se calcula usando la expresión

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}$$

Además definimos

$$\bar{A} = A\,\hat{n}$$



En este caso,

$$\bar{r}_2 = -\frac{b}{2}\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_y + \frac{b}{2}\cos\theta\,\hat{e}_z$$

$$\bar{r}_4 = \frac{b}{2}\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_y - \frac{b}{2}\cos\theta\,\hat{e}_z$$

Luego el torque resulta:

$$\bar{\tau} = \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 + \bar{r}_4 \times \bar{F}_4$$

donde $\bar{r}_4 = -\bar{r}_2$ y $\bar{F}_2 = -\bar{F}_4$

$$\bar{\tau} = 2\bar{r}_2 \times \bar{F}_2 = 2\left(-\frac{b}{2}\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_y + \frac{b}{2}\cos\theta\,\hat{e}_z\right) \times \left(IBa\,\hat{e}_z\right)$$

$$\bar{\tau} = -baIB\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_x$$

$$\bar{\tau} = -IBA\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_x$$

$$\boxed{\bar{\tau} = I\,\bar{A} \times \bar{B}}$$

$$\bar{\tau} = I\,\bar{A} \times \bar{B}$$

Si tenemos N espiras, en los lados ② y ④ la fuerza se multiplica por N, luego:

$$\bar{\tau} = N I\,\bar{A} \times \bar{B}$$

Al vector $NI\bar{A}$ se lo denomina <u>momento dipolar magnético</u>

$$\bar{\mu} = N I \bar{A} \qquad \bar{\mu} \parallel \bar{A}$$

luego

$$\boxed{\bar{\tau} = \bar{\mu} \times \bar{B}}$$

Esta ecuación es análoga a lo que obtuvimos para el campo eléctrico $\bar{E}$ y el momento dipolar eléctrico,

$$\bar{\tau} = \bar{p} \times \bar{E}$$