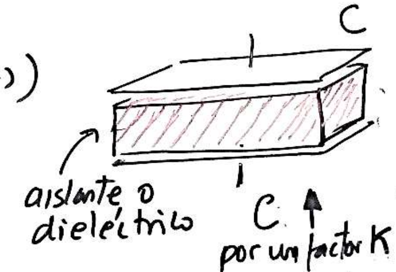
Campo Eléctrico en medios materiales (dieléctricos)

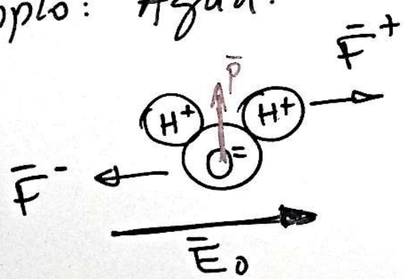
Como vimos podemos separar los materiales en:

- → conductores
- → aisladores (dieléctricos)
  - ↙ polares
  - ↘ no polares



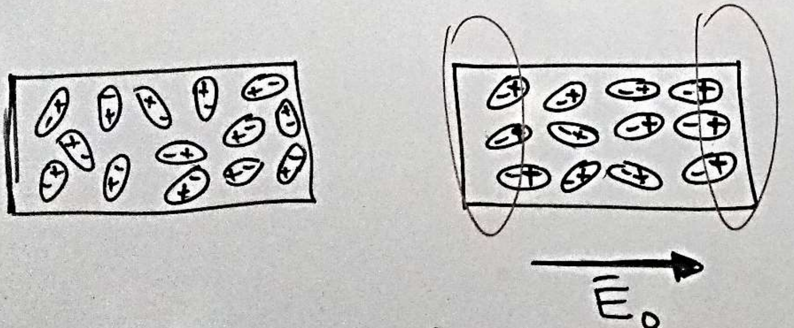
Polares: Son materiales con dipolos permanentes

Ejemplo: Agua.

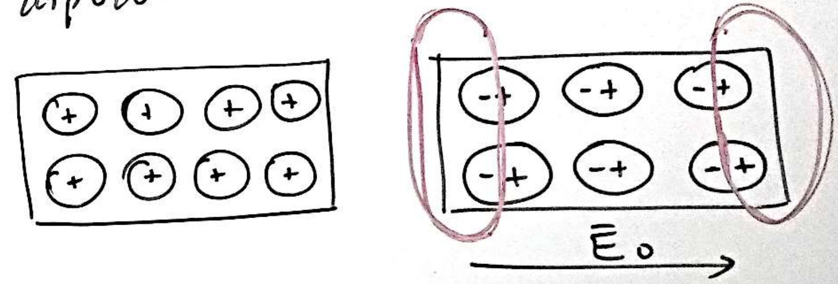


El campo externo o campo aplicado $\bar{E}_0$ tiende a alinear las moléculas con $\bar{E}_0$ es decir $\bar{p} \parallel \bar{E}_0$

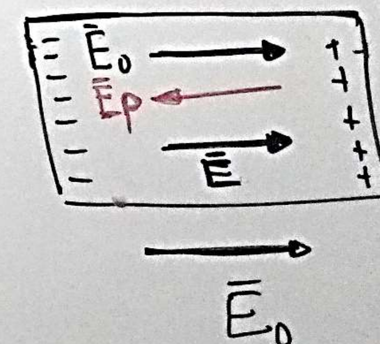
Si en lugar de una molécula tenemos un sólido polar, las moléculas que forman el sólido (ej: hielo) tienden a alinearse.



No polares: Están formados por átomos neutros, al aplicar el campo eléctrico $\bar{E}_0$, se forma un dipolo en cada átomo. La nube electrónica se desplaza formando un dipolo.



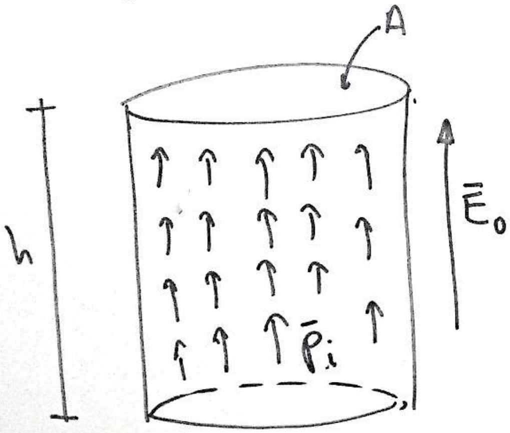
En ambos casos podemos pensar que la carga inducida en la superficie produce un campo eléctrico $\bar{E}_p$



$\Rightarrow$ el campo eléctrico en el interior del material es $\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}_p$ $\quad |\bar{E}_0| > |\bar{E}|$

Polarización

Como vimos antes, como consecuencia del alineamiento de los dipolos con $\bar{E}_0$ aparece un $\bar{E}_p$ en el material.



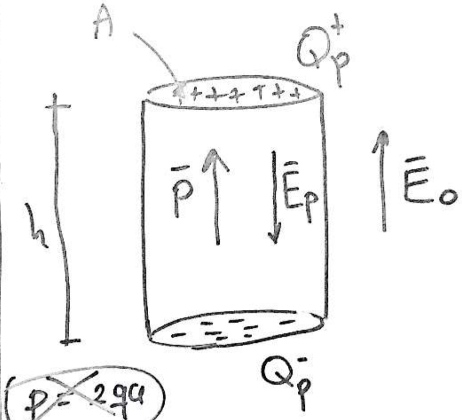
Definimos el vector polarización $\bar{P}$ o momento dipolar por unidad de volumen,

$$\bar{P} = \frac{1}{vol} \sum \bar{p}_i \qquad \bar{P} \parallel \bar{p}_i$$

En el caso de nuestro cilindro, donde suponemos todos los dipolos alineados

$$\boxed{|\bar{P}| = \frac{N p}{A h}} \qquad p = |\bar{p}_i|$$

Por otro lado si consideramos q' la carga superficial no esta compensada, podemos pensar nuestro cilindro de manera equivalente:



Es decir, tenemos una carga superficial que genera un dipolo tal que.

$$h Q_p = N p$$

dividimos por el área,

$$\frac{h Q_p}{A} = \sigma_p h = \frac{N p}{A} \Rightarrow \boxed{\sigma_p = \frac{N p}{A h}}$$

es decir, $\boxed{\sigma_p = |\bar{P}|}$

la densidad de carga superficial es igual al módulo del vector polarización

Finalmente el campo eléctrico $\bar{E}_p$ resulta,

$$|\bar{E}_p| = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} = \frac{|\bar{P}|}{\varepsilon_0}$$

Como las direcciones de $\bar{E}_p$ y $\bar{P}$ son opuestas, resulta,

$$\boxed{\bar{E}_p = -\frac{\bar{P}}{\varepsilon_0}}$$

Recordemos que

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}_p$$

$$\therefore \quad \bar{E} = \bar{E}_0 - \frac{\bar{P}}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

Por otro lado, $\bar{P}$ no sólo tiene la misma dirección que $\bar{E}_0$, tambien es proporcional a $\bar{E}_0$ y por lo tanto lo es con $\bar{E}$, es decir

$$\bar{P} = \varepsilon_0 \chi_e \bar{E}$$

$\chi_e > 0$ es la susceptibilidad eléctrica

Reemplazando en (1), tenemos:

$$\bar{E} = \bar{E}_0 - \chi_e \bar{E}$$

$$\bar{E}_0 = (1 + \chi_e)\bar{E}$$

$$\boxed{\bar{E}_0 = K_e \bar{E}}$$

donde K_e es la constante dieléctrica.

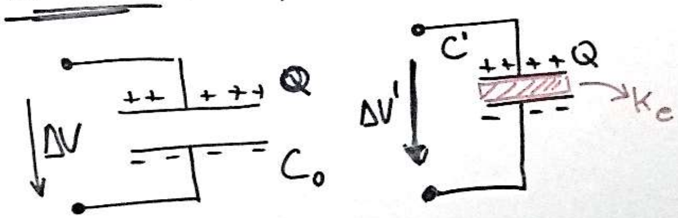
$$\boxed{K_e = 1 + \chi_e}$$

Como $K_e > 1$ obtenemos que

$$|\bar{E}_0| > |\bar{E}|$$

<u>Obs</u>: La presencia de un dieléctrico disminuye el campo eléctrico en el interior del material.

<u>Caso 1</u>: Capacitor con Q constante



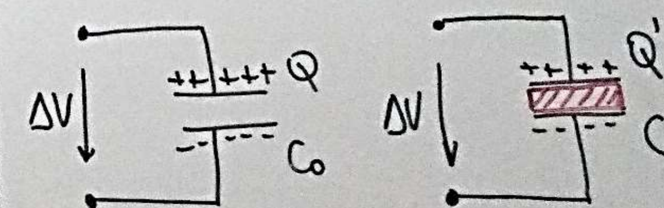
$$\Delta V' = -\int \bar{E}' \cdot d\bar{l}$$

$$Q = C_0 \Delta V \qquad Q = \Delta V' C' \qquad \Delta V' = \frac{\Delta V}{K_e}$$

$$\boxed{C' = \frac{Q K_e}{\Delta V} = K_e C_0}$$

Como $K_e > 0$ $\quad C' > C_0$

<u>Caso 2</u>: Capacitor con ΔV constante



$$Q' = C' \Delta V$$

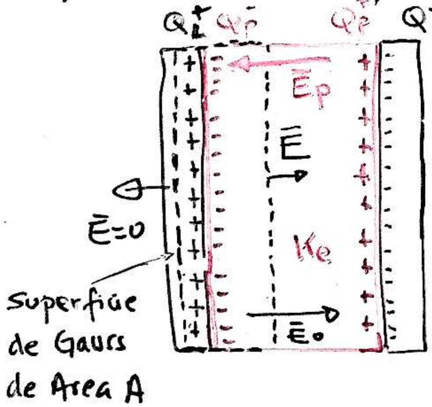
$$Q' = K_e Q$$

$$\boxed{C' = \frac{K_e Q}{\Delta V} = K_e C_0}$$

$$Q = \Delta V \, C_0$$

VECTOR DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO ($\bar{D}$)

En primer lugar vamos a aplicar la Ley de Gauss en un capacitor con dieléctrico:



$$\underset{SG}{\oiint} \bar{E}\cdot d\bar{A} = \frac{q_{ENC}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_L - Q_P}{\varepsilon_0}$$

resolviendo la integral

$$E = \frac{Q_L - Q_P}{\varepsilon_0 A} \quad (1)$$

Como vimos (en el caso donde Q permanece constante) el efecto del dieléctrico es disminuir el campo eléctrico, es decir

$$\bar{E} = \frac{\bar{E}_0}{K_e} \qquad \text{donde } E_0 = \frac{Q_L}{A\varepsilon_0}$$

por lo tanto de la ecuación (1),

$$Q_P = Q_L - \varepsilon_0 A E = Q_L - \varepsilon_0 A \frac{E_0}{K_e} = Q_L - \frac{\cancel{\varepsilon_0 A}}{K_e}\frac{Q_L}{\cancel{\varepsilon_0 A}}$$

$$Q_P = Q_L\left(1 - \frac{1}{K_e}\right)$$

Reemplazamos en la ecuación de la ley de Gauss

$$\underset{S.G}{\oiint} \bar{E}\cdot d\bar{A} = \frac{Q_L}{\varepsilon_0} - \frac{Q_L}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{K_e}\right) = \frac{Q_L}{\varepsilon_0 K_e}$$

Vamos a definir la permitividad del dieléctrico como

$$\varepsilon = \varepsilon_0 K_e$$

y denominamos vector desplazamiento eléctrico al vector:

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E} = \varepsilon_0 K_e \bar{E}$$

Luego en términos de $\bar{D}$, la ley de Gauss resulta:

$$\boxed{\underset{SG}{\oiint} \bar{D}\cdot d\bar{S} = Q_L}$$

Q_L es la carga "libre" en la placa conductora del capacitor

que en su forma diferencial es

$$\nabla\cdot\bar{D} = \rho_L$$

Otra forma de escribir el vector desplazamiento es:

$$\bar{D} = K_e \varepsilon_0 \bar{E} = (1+\chi_e)\varepsilon_0 \bar{E}$$

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \chi_e \varepsilon_0 \bar{E}$$

$$\boxed{\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}}$$

$\bar{D}$: Está relacionado con la carga libre

$\bar{P}$: Está relacionado con la carga polarizada

$\bar{E}$: Está relaciondo con la carga total.

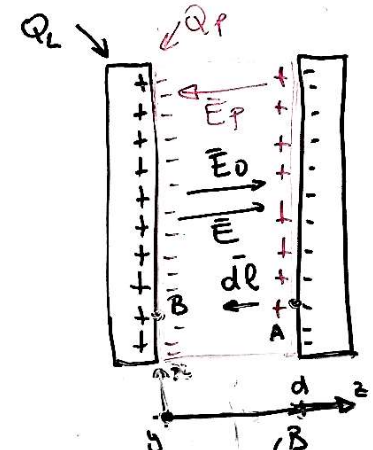
Valores de K_e y χ_e

$$K_e = 1+\chi_e$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 K_e = \varepsilon_0(1+\chi_e)$$

	K_e	χ_e
Vacio	1.0	0
aire	1.00054	0.00054
Benzeno	2.28	1.28
sal	5.9	4.9
H_2O	80.1	79.1
$K(Ta,Nb)O_3$	34000	33999

Capacidad de un capacitor de placas paralelas con dieléctrico



Usando la ley de Gauss

$$DA = Q_L$$

Como $\bar{D} = \varepsilon_0 K_e \bar{E}$

$$\bar{E} = \frac{Q_L}{\varepsilon_0 K_e A}\hat{e}_z = \frac{\sigma_L}{\varepsilon_0 K_e}\hat{e}_z$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\int_A^B \frac{\sigma_L}{\varepsilon_0 K_e}\hat{e}_z \cdot \underbrace{dl(-\hat{e}_z)}_{d\bar{l}}$$

$dl = -dz$

$$\Delta V_{BA} = -\frac{\sigma_L}{\varepsilon_0 K_e}\int_d^0 dz = \frac{\sigma_L}{\varepsilon_0 K_e} d = \frac{Q_L d}{A \varepsilon_0 K_e} = \frac{\Delta V_0}{K_e}$$

$$C = \frac{Q_L}{\Delta V_{BA}} = K_e \overbrace{\frac{\varepsilon_0 A}{d}}^{C_0} = \boxed{K_e C_0 = C}$$

La energía almacenada resulta,

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}K_e C_0 \frac{\Delta V_0^2}{K_e^2} = \frac{U_0}{K_e}$$

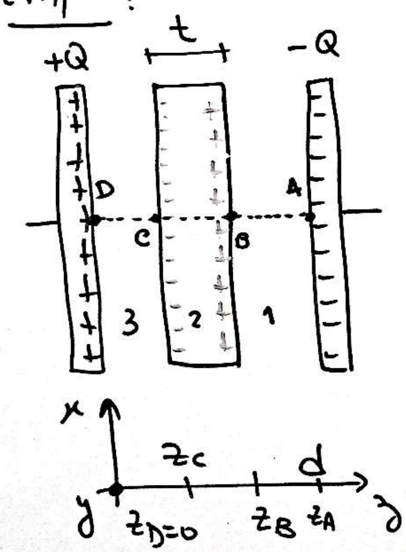
la energía por unidad de volumen resulta,

$$u = \frac{U}{A\cdot d} = \frac{1}{Ad}\,\frac{1}{2}CV^2$$

$$\boxed{u = \frac{1}{\cancel{Ad}}\,\frac{1}{2}\,\frac{\overset{\varepsilon}{K_e\,\varepsilon_0}\,\cancel{A}}{d^2}\,V^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$

$$E = \frac{V}{d}$$

Ejemplo:



$$\bar{E}_1 = \bar{E}_3 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{e}_z \qquad \bar{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 K_e}\hat{e}_z$$

$$V_D - V_A = -\int_A^D \bar{E}\cdot d\bar{l} =$$

$$= -\int_A^B \bar{E}_1\cdot d\bar{l} - \int_B^C \bar{E}_2\cdot d\bar{l} -$$

$$-\int_C^D \bar{E}_3\cdot d\bar{l} =$$

$$\Delta V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\underbrace{(z_B - z_A)}_{<0} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\underbrace{(z_D - z_C)}_{<0} -$$

$$-\frac{\sigma}{\varepsilon_0 K_e}\underbrace{(z_C - z_B)}_{<0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\underbrace{\left(z_A \overbrace{- z_B + z_C}^{-t} - \underbrace{z_D}_{=0}\right)}_{d-t} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0 K_e}\underbrace{(z_C - z_B)}_{<0}$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-t) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 K_e}t = \underbrace{\frac{Q}{A\varepsilon_0}}\left[(d-t) + \frac{t}{K_e}\right]$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{A\,\varepsilon_0\,K_e}{\left[\underbrace{(d-t)K_e} + t\right]}}$$

si $t \to d$ $\qquad C = \dfrac{\varepsilon_0 A\,K_e}{d} = K_e C_0$

si $t \to 0$ $\qquad C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d} = C_0$