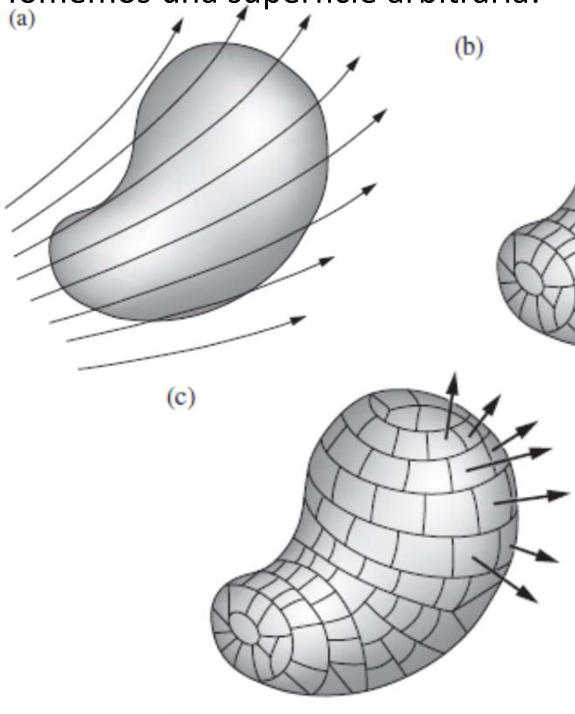
Ley de Gauss
Flujo de Campo Eléctrico

La magnitud del campo eléctrico $\bar{E}$ es proporcional al número de líneas de campo por unidad de área, esta cantidad es lo que denominamos flujo eléctrico:

$$\emptyset_{\bar{\mathrm{E}}}$$

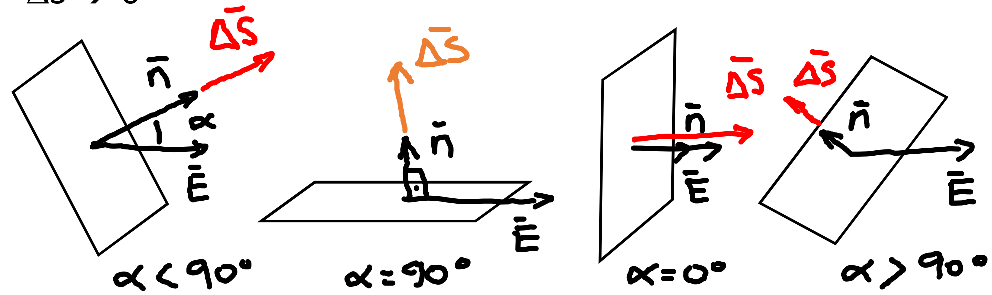
Tomemos una superficie arbitraria:



- Dividimos la superficie en elementos de superficie ΔS → 0 de manera de considerarlos planos
- Representamos cada elemento de superficie con un vector:

$$\Delta\bar{\boldsymbol{S}} = \Delta \boldsymbol{S}\, \bar{\boldsymbol{n}}$$

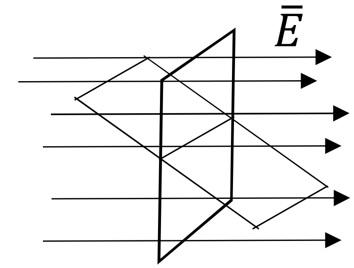
- A cada elemento de área le asignamos un $\bar{E}$ ~ cte dado que ΔS → 0



Es fácil ver que si:

α = 90° $\Delta\emptyset_{\bar{\mathrm{E}}} = 0$

α = 0° $\Delta\emptyset_{\bar{\mathrm{E}}}$ es máximo



Si comenzamos a inclinar el ΔS de manera que α ≠ 0, $\Delta\emptyset_{\bar{\mathrm{E}}}$ disminuye de acuerdo a la siguiente ecuación,

$$\Delta\emptyset_{\bar{\mathrm{E}}} = \bar{E} \bullet \Delta\bar{S} = E\,\Delta S\,cos\,(\alpha)$$

Podemos ver que $\Delta\emptyset_{\bar{\mathrm{E}}}$ es un escalar.
El flujo total sobre la superficie es la suma de los aportes de cada uno de las ΔS, es decir:

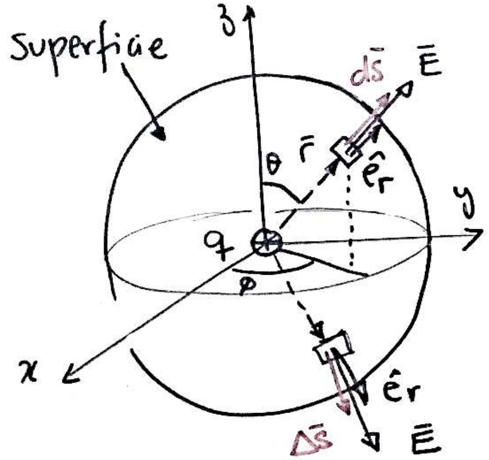
$$\emptyset_{\bar{\mathrm{E}}} = \lim_{\Delta\bar{S}_i \to 0} \sum_i \bar{E}_i \bullet \Delta\bar{S}_i$$

O en su forma integral,

$$\emptyset_{\bar{\mathrm{E}}} = \oiint_S \bar{E} \bullet d\bar{S}$$

Para resolver la integral necesitamos especificar la superficie y luego resolver punto a punto

Caso de una carga puntual



El campo eléctrico apunta en la dirección radial, de manera que:

$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|^2}\hat{e}_{\bar{r}-\bar{r}'}$$

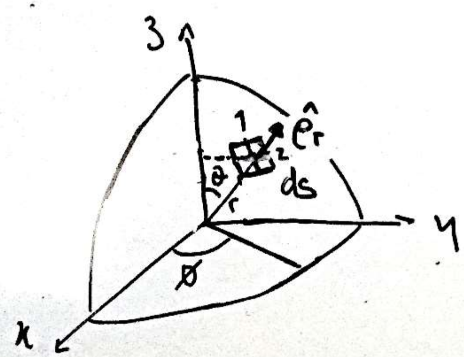
Como $\bar{r}'=0$

$$|\bar{r}-\bar{r}'| = |\bar{r}|^2 = r^2$$

$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{e}_r$$

Sabemos que para una superficie esférica

$$ds = r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$$



$$ds = dl_1 \, dl_2$$

$$dl_1 = r\,d\theta$$

$$dl_2 = r \operatorname{sen}\theta \, d\phi$$

$$ds = r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$$

Luego

$$d\bar{s} = r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{e}_r$$

Como $\bar{E}$ es $\parallel$ a $\hat{e}_r$

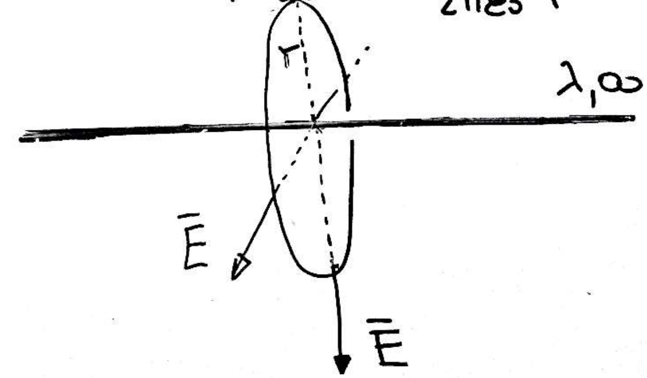
$$d\phi_{\bar{E}} = \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \underbrace{\hat{e}_r\cdot\hat{e}_r}_{1}$$

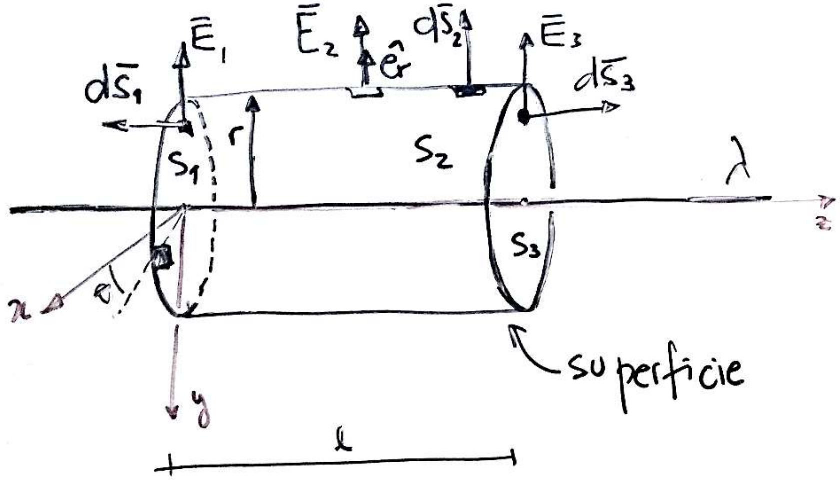
$$\phi_{\bar{E}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi}_{4\pi}$$

$$\boxed{\phi_{\bar{E}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Caso de una línea ∞ con una distribución lineal de carga λ

$$\bar{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\hat{e}_r$$





$$\Phi_{\bar{E}} = \oiint \bar{E} \cdot d\bar{S} = \iint_{S_1} \bar{E}_1 \cdot d\bar{S}_1 + \iint_{S_2} \bar{E}_2 \cdot d\bar{S}_2 + \iint_{S_3} \bar{E}_3 \cdot d\bar{S}_3$$

como: $\bar{E}_3 \perp d\bar{S}_3$ y $\bar{E}_1 \perp d\bar{S}_1$

$$\iint \bar{E}_3 \cdot d\bar{S}_3 = \iint \bar{E}_1 \cdot d\bar{S}_1 = 0$$

$$d\bar{S}_2 = r \, d\theta \, dz \; \hat{e}_r$$

$$\bar{E}_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{e}_r$$

$$\iint \bar{E}_2 \cdot d\bar{S}_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\ell} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r} r \, d\theta \, dz \; \underbrace{\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r}_{1}$$

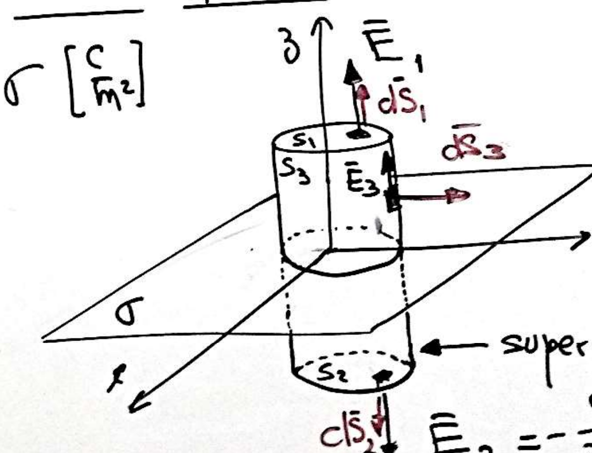
$$\iint \bar{E}_2 \cdot d\bar{S}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ell \, 2\pi = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\Phi_{\bar{E}} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}$$

Plano infinito de cargas

$\sigma \left[\frac{C}{m^2}\right]$

$$\bar{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{e}_z$$



$S_1 = S_2 = S$

$$\bar{E}_2 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{e}_z$$

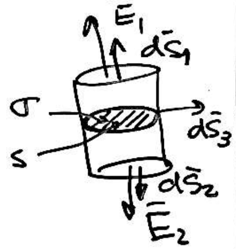
$$\Phi_{\bar{E}} = \oiint \bar{E} \cdot d\bar{S} = \iint_{S_1} \bar{E}_1 \cdot d\bar{S}_1 + \iint_{S_2} \bar{E}_2 \cdot d\bar{S}_2 + \iint_{S_3} \bar{E}_3 \cdot d\bar{S}_3$$

Como el campo eléctrico en S_1 y S_2 es cte,

$$\iint_{S_1} \bar{E}_1 \cdot d\bar{s}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \iint_{S_1} ds_1 = \frac{\sigma S_1}{2\varepsilon_0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \widehat{\bar{E}_1, d\bar{s}_1} = 1 \\ \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z = 1 \end{array} \right.$$

$$\iint_{S_2} \bar{E}_2 \cdot d\bar{s}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \iint_{S_2} ds_2 = \frac{\sigma S_2}{2\varepsilon_0}$$



$$\Rightarrow \quad \Phi_{\bar{E}} = \frac{\sigma S_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma S_2}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

nuevamente

$$\sigma \cdot S = Q_{enc} \quad \therefore$$

$$\boxed{\Phi_{\bar{E}} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}$$

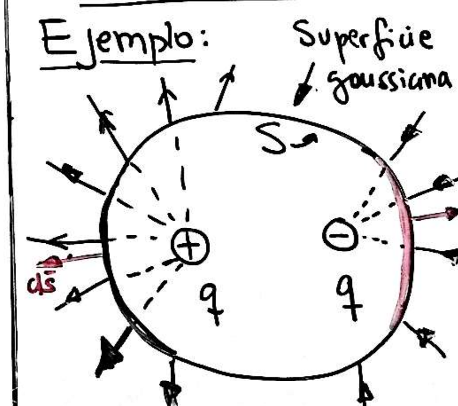
Finalmente, generalizando estos resultados llegamos a la ley de Gauss,

$$\boxed{\Phi_{\bar{E}} = \oint\!\!\!\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{q_{ENC}}{\varepsilon_0}}$$

Obs: La ley de Gauss es completamente general. Sin embargo, su uso práctico se reduce a casos con geometría definida:

Sistema	Simetría	Superficie gaussiana
cable ∞	cilíndrica	Cilindro coaxil
plano ∞	plano	caja rectangular o cilíndrica
esfera/casquete carga puntual	esférica	esférica concéntrica

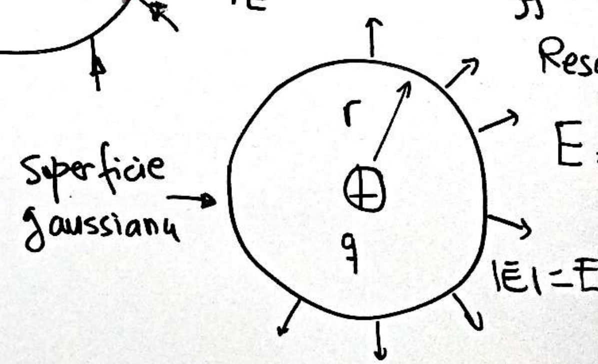
Ejemplo:



$$\oint\!\!\!\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = 0$$

$\Phi_{\bar{E}} < 0$

$\Phi_{\bar{E}} > 0$

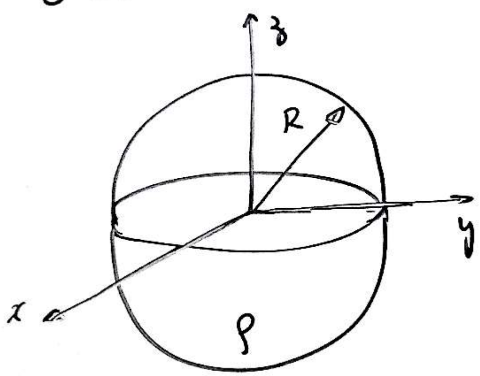


$$\oint\!\!\!\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Resolviendo:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Ejemplo 2: Esfera no conductora de radio R



ρ carga eléctrica por unidad de volumen distribuida uniformemente.

Queremos determinar $\bar{E}$ en todo el espacio.

Si la carga en la esfera es Q tenemos que

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

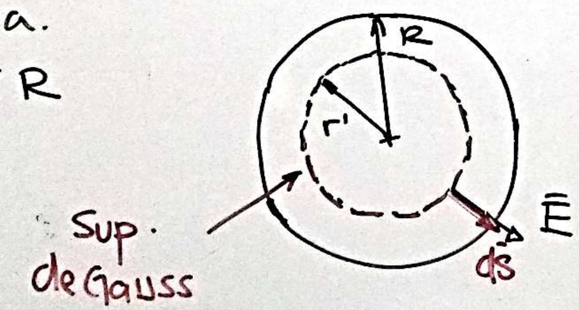
Separamos el problema en dos intervalos de r:

a) $0 \leq r \leq R$.

b) $R \leq r > \infty$

Como la simetría del problema es esférica elegimos una superficie de Gauss esférica.

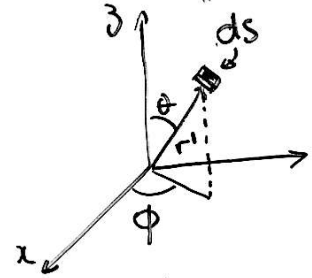
$0 \leq r \leq R$



Como $\bar{E}$ y el $d\bar{S}$ sobre el casquete de radio r' son colineales y van en el mismo sentido,

$$\bar{E} \cdot d\bar{S} = E\, dS$$

además $\quad dS = r'^2 \operatorname{sen} \theta \, d\phi$



Si planteamos la ley de Gauss

$$\Phi_{\bar{E}} = \oiint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

En este caso $\quad q_{enc} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r'^3$

Para resolver la integral, tenemos que $\bar{E} \parallel d\bar{S}$ y $E = cte$ ∴

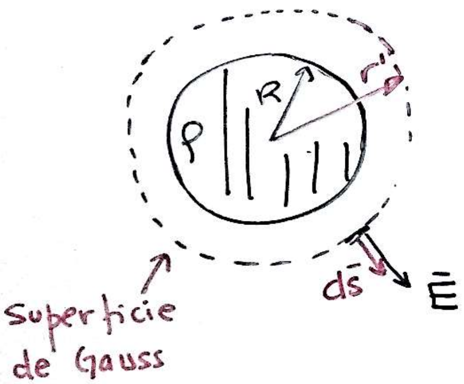
$$\oiint \bar{E} \cdot d\bar{S} = \oiint E\, r'^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= E r'^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi = E\, 4\pi r'^2$$

$$\Rightarrow E\, 4\pi r'^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r'^3$$

$$\boxed{E = \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0}} \Rightarrow \boxed{\bar{E} = \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0}\hat{e}_r}$$

Si $r \geq R$



$$\Phi_{\bar E} = \oiint_S \bar E \cdot d\bar s$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E\, r'^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi =$$

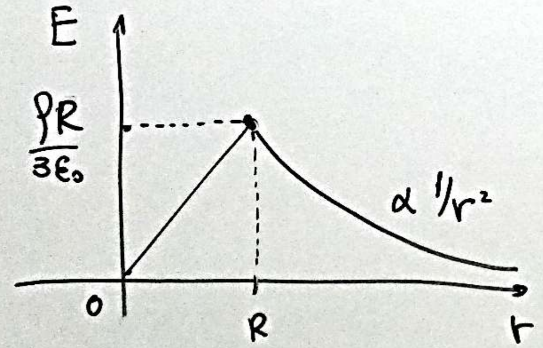
$$= E\, r'^2\, 4\pi = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Como $q_{enc} = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ volumen de la esfera.

$$E\, r'^2 \cancel{4\pi} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cancel{\frac{4}{3}\pi} R^3$$

despejando y llamando $r' \longrightarrow r$

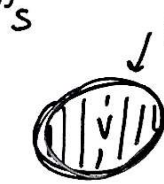
$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2} \Rightarrow \boxed{\bar E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\hat e_r}$$



Forma diferencial de la Ley de Gauss

Recordemos al Teorema de la divergencia

$$\iiint_V \underbrace{\nabla\cdot}_{\text{divergencia}} \underbrace{\bar f}_{\text{campo vectorial}}\, dv = \oiint_S \bar f \cdot d\bar s$$



A partir de la ley de Gauss

$$\oiint_S \bar E(\bar r)\cdot d\bar s = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \quad y \quad q_{enc} = \iiint_V \rho(\bar r)\, dv$$

$$\oiint_S \bar E(\bar r)\cdot d\bar s = \iiint_V \frac{\rho(\bar r)}{\varepsilon_0}\, dv$$

Utilizando al Teorema de la divergencia

$$\oiint_S \bar E(\bar r)\cdot d\bar s = \iiint_V \nabla\cdot\bar E(\bar r)\, dv = \iiint_V \frac{\rho(\bar r)}{\varepsilon_0}\, dv$$

$$\therefore \quad \boxed{\nabla\cdot\bar E(\bar r) = \frac{\rho(\bar r)}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\bar E = \rho/\varepsilon_0}$$