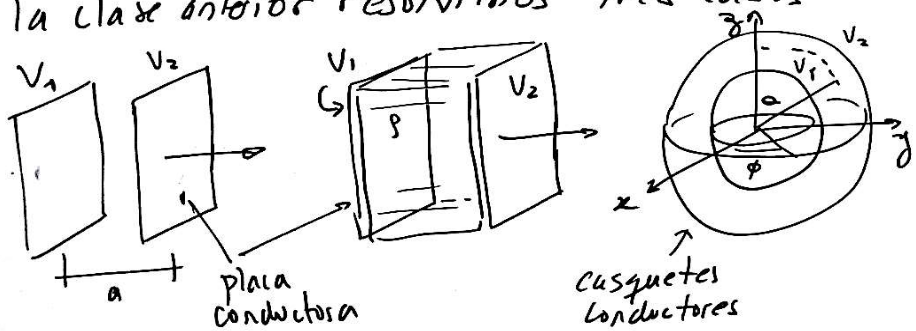
Solución de la ecuación de Laplace y de Poisson.

Condiciones de contorno y teorema de unicidad.

En la clase anterior resolvimos tres casos



La pregunta que nos hacemos es ¿cuales condiciones de contorno son suficientes conocer para que el potencial eléctrico quede determinado?

La respuesta es el teorema de unicidad de la solución,

> La solución a la ecuación de Laplace en un volumen v es única si el potencial eléctrico es especificado en la superficie $\underline{S}$ que lo contiene

Este teorema nos dice que mientras V cumpla con la ecuación de Laplace y las cc, V es único!

Si la región de interés tiene cargas eléctricas en su interior, el teorema de unicidad se re-escribe $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

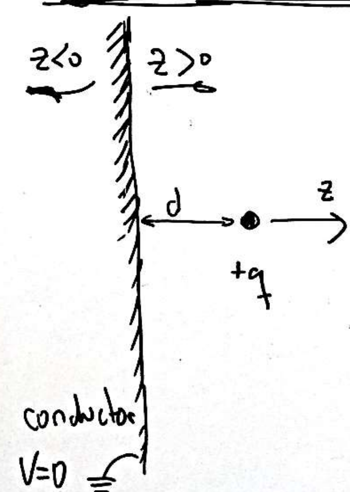
> El potencial eléctrico V en un volumen v es determinado de manera única si,
> a) Conocemos la densidad de carga eléctrica en el volumen v
> b) Conocemos el valor del potencial eléctrico en la superficie de contorno.

Métodos para encontrar el potencial eléctrico: Método de las imágenes, de separación de variables, de relajación.

Método de imagenes

Una de las moralejas del Teorema de Unicidad es que no importa como consigamos la solución para $V(\vec{r})$, lo importante es que cumpla con la ecuación de Poisson y las condiciones de contorno y esa solución es única.

Ejemplo del método de las imagenes.



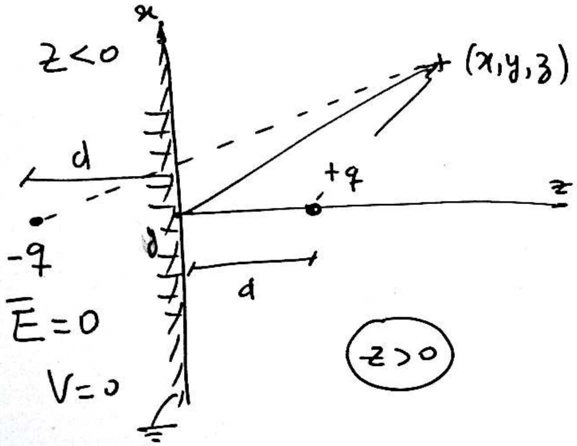
a) $V(\vec{r})$ para $z>0$

b) densidad de carga σ en la superficie del plano conductor

Si observamos el problema, las condiciones de contorno son:

1) $V(x,y,z)=0$ si $z=0$

2) $V(\vec{r})=0$ si $z\to\infty$



$$\boxed{V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{(z-d)^2+x^2+y^2}} - \frac{q}{\sqrt{(z+d)^2+x^2+y^2}}\right]}$$

Si $z=0$ $\quad V(x,y,0)=0$

Si $r\to\infty$ $\quad V(\infty)\to 0$

Para calcular el campo eléctrico,

$$\boxed{\bar{E} = -\nabla V}$$

$$\nabla V(x,y,z) = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{e}_z$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x}{((z-d)^2+x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}((z+d)^2+x^2+y^2)^{3/2}}\right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{y}{((z-d)^2+x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{y}{((z+d)^2+x^2+y^2)^{3/2}}\right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\overset{z\to 0}{\cancel{2}(z-d)}}{\cancel{2}((z-d)^2+x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\overset{z\to 0}{\cancel{2}(z+d)}}{((z+d)^2+x^2+y^2)^{3/2}}\right]$$

Como vamos a usar que

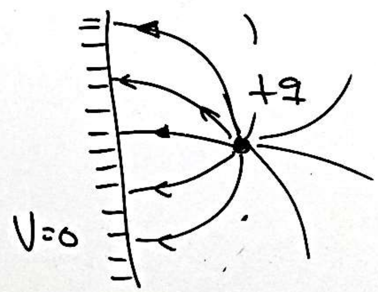
$$\boxed{E^{\perp}_{arriba} - E^{\perp}_{abajo} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Como $E^{\perp}_{abajo} = 0$ me queda

$$\boxed{\varepsilon_0 E^{\perp}_{z\to 0^+} = \sigma}$$

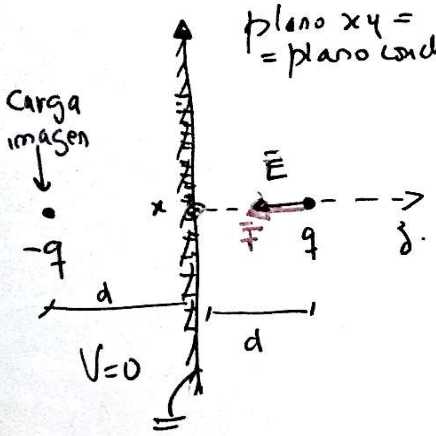
cuando $z\to 0$ $\quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \therefore$

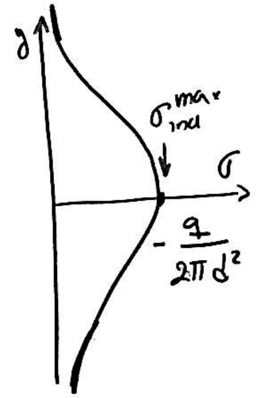
$$\bar{E}_{z\to 0^+} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2d}{(d^2+x^2+y^2)^{3/2}}\right]\hat{e}_z$$



$$\boxed{\sigma_{ind} = -\frac{q}{4\pi}\frac{2d}{(d^2+x^2+y^2)^{3/2}}}$$

Ahora graficamos σ_{ind}.



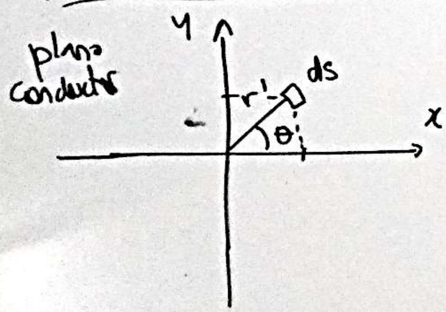


$$\sigma_{ind} = -\frac{qd}{2\pi}\frac{1}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

si x e $y \to \infty$ $\quad\sigma_{ind} \to 0$

si x e $y \to 0$ $\quad\sigma_{ind}$ es máximo $\boxed{\sigma_{ind}^{max} = -\frac{q}{2\pi d^2}}$

Podemos calcular la carga inducida total



El plano xy es el plano conductor.

$$dQ_{ind}^T = \sigma ds = \sigma \overbrace{r'dr'd\theta}^{ds}$$

Como

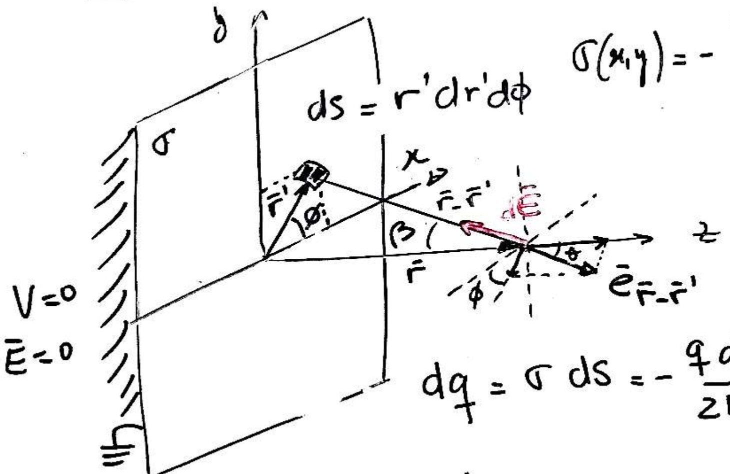
$$r'^2 = x^2+y^2$$

$$Q_{ind}^T = -\frac{qd}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{r'}{(r'^2+d^2)^{3/2}}dr'd\theta =$$

$$= -qd\int_0^{\infty}\frac{r'}{(r'^2+d^2)^{3/2}}dr' = -qd\left.\frac{(-1)}{\sqrt{r'^2+d^2}}\right|_0^{\infty}$$

$$= -qd\left[0-\left(-\frac{1}{d}\right)\right] = -q \Rightarrow \boxed{Q_{ind}^T = -q}$$

Cálculo de la Fuerza sobre q



$$\sigma(x,y) = -\frac{qd}{2\pi}\frac{1}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

$$ds = r'dr'd\phi$$

$$dq = \sigma\, ds = -\frac{qd}{2\pi}\frac{\overbrace{r'dr'd\phi}^{ds}}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\bar{r} = d\hat{e}_z \Rightarrow |\bar{r}| = d$$

$$\bar{r}' = r'\cos\phi\ \hat{e}_x + r'\operatorname{sen}\phi\ \hat{e}_y$$

$$|\bar{r}-\bar{r}'| = |d\,\hat{e}_z - r'\cos\phi\ \hat{e}_x - r'\operatorname{sen}\phi\ \hat{e}_y| =$$

$$= (d^2+r'^2)^{1/2} = (d^2+x^2+y^2)^{1/2}$$

$$\bar{e}_{\bar{r}-\bar{r}'} = -\operatorname{sen}\beta\cos\phi\,\hat{e}_x - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\phi\,\hat{e}_y + \cos\beta\,\hat{e}_z$$

Como

$$d\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{|\bar{r}-\bar{r}'|^2}\hat{e}_{\bar{r}-\bar{r}'}$$

$$d\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{qd}{2\pi}\frac{r'dr'd\phi}{(r'^2+d^2)^{3/2}}\right)\frac{1}{(d^2+r'^2)}\cos\beta\,\hat{e}_z$$

Usamos la simetría del problema. Sabemos que el campo eléctrico sobre el eje z tendrá sólo componente en la dirección z. Las componentes en las direcciones x e y se cancelan.

Como $\cos\beta = \frac{d}{(r'^2+d^2)^{1/2}}$

tenemos que,

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(-)\frac{qd^2}{2\pi}\frac{r'dr'd\phi}{(d^2+r'^2)^3}\hat{e}_z$$

$$\bar{E} = -\frac{qd^2}{8\pi^2\varepsilon_0}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{r'dr'}{(d^2+r'^2)^3}d\phi\ \hat{e}_z$$

$$= -\frac{qd^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dr'^2}{(d^2+r'^2)^3}\hat{e}_z = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(2d)^2}\hat{e}_z$$

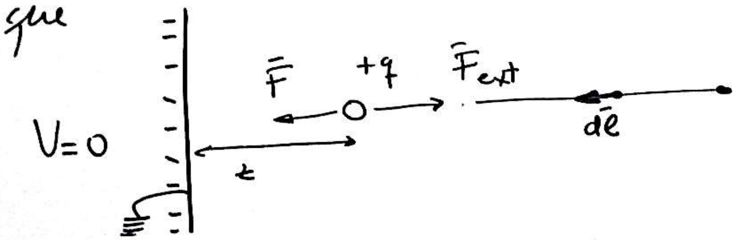
$$\therefore\ \boxed{\bar{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2d)^2}\hat{e}_z}$$

que sucede con la energía?

Si analizamos la energía electrostática con el sistema de dos cargas $+q$ y $-q$ resulta que

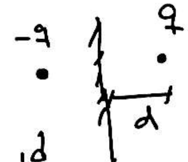
$$W = q\,V(0,0,d) = q\,\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-q)}{2d} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{2d}$$

Sin embargo si calculamos el trabajo realizado para traer la carga $+q$, utilizando la fuerza $\bar{F}$ resulta que



$$W_{ext} = \int_{\infty}^{d} \bar{F}_{ext}\cdot d\bar{\ell} = \int_{\infty}^{d} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{4z^2}\,dz$$

$d\bar{\ell} = dz\,\bar{e}_z$ $\qquad$ $\bar{F}_{ext} = -\bar{F}_E$

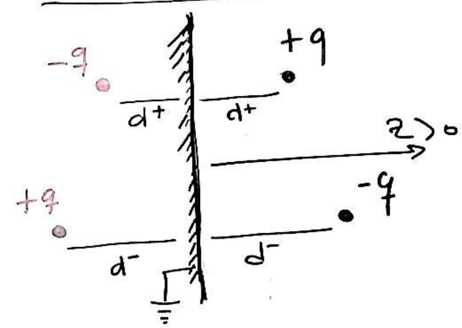


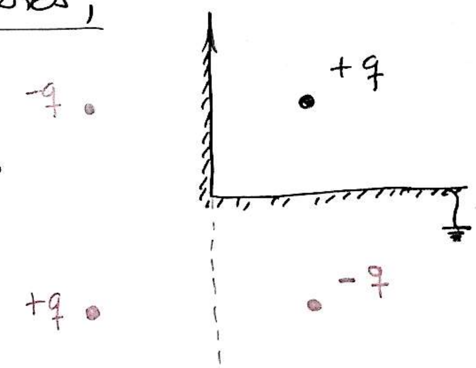
$$W_{ext} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 4}\int_{\infty}^{d}\frac{1}{z^2}\,dz = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 4}\left.-\frac{1}{z}\right|_{\infty}^{d} =$$

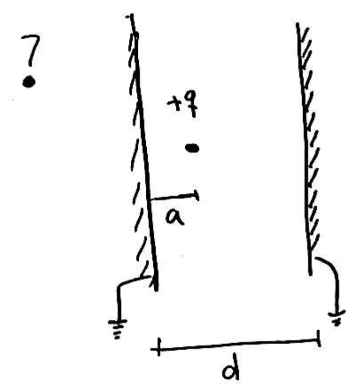
$$W_{ext} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\,4}\,\frac{-1}{d} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{4d}$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2}W \;!$$

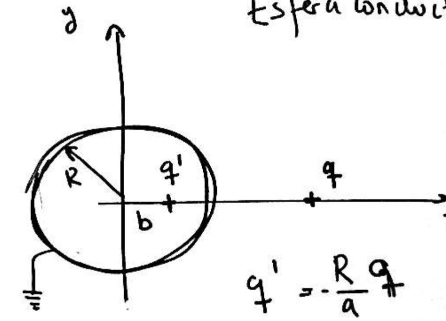
Otros problemas que se pueden resolver por el método de imágenes;







Esfera conductora



$q' = -\frac{R}{a}q$

$b = \frac{R^2}{a}$

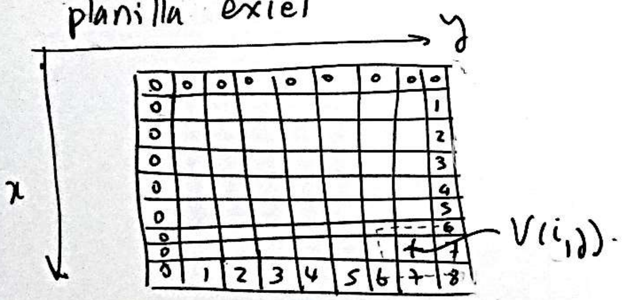
Método de relajación

Este método hace uso de la propiedad de la función solución para la ecuación de Laplace.

en 3D $$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi R^2} \oiint_{sup.} V(x,y,z)\, ds$$

en 2D $$V(x,y) = \frac{1}{2\pi R} \oint V(x,y)\, d\ell$$

Para graficar este método se puede usar una planilla exel



$$V(i,j) = \Big[V(i-1,j) + V(i+1,j) + V(i,j-1) + V(i,j+1) + V(i+1,j+1) + V(i-1,j-1) + V(i+1,j-1) + V(i-1,j+1)\Big]/8$$

El cálculo lo hacemos secuencialmente y luego iteramos hasta lograr la convergencia.