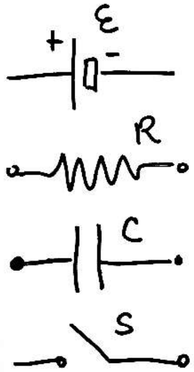
Circuitos eléctricos

Los circuitos consisten en fuentes de energía eléctrica (batería, generador) con dispositivos que consumen energía eléctrica (resistencias) o la almacenan (capacitores)

Para representar estos dispositivos usamos los símbolos



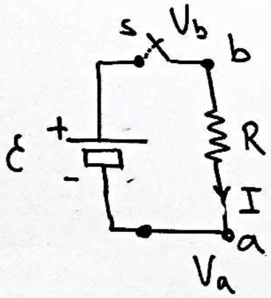
fuente

Resistencia

Capacitor

Interruptor

fuerza electromotriz (fem) (baterías, generadores)



la diferencia de potencial

$$\Delta V = V_b - V_a$$

establece una corriente eléctrica a través de R. Como vimos la carga eléctrica pierde energía potencial cuando atraviesa R. Sin embargo la "fem" realiza un trabajo que eleva la energía potencial, luego

definimos

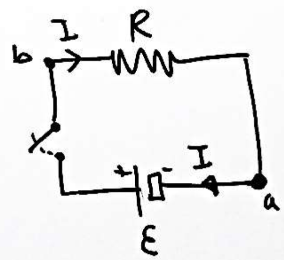
$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dq} \qquad [V]\text{. volt}$$

El balance de energía en este circuito sería

$$\underbrace{\text{Energía química} \rightarrow \text{Energía Eléctrica}}_{\text{batería}} \longrightarrow \underbrace{\text{Energía Térmica}}_{\text{Resistencia}}$$

Podemos observar que el trabajo realizado para mover la carga eléctrica en el circuito cerrado es nulo dado que cuando cerramos el circuito volvemos a un mismo valor de potencial eléctrico es decir:

$$W = q\oint \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0$$



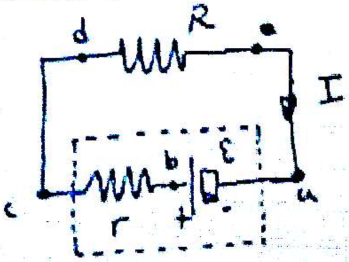
$$\underbrace{(V_b - V_a) + (V_a - V_b)}_{=0} = \underbrace{-\int_a^b \bar{E}\cdot d\bar{l}}_{\text{batería}} \underbrace{-\int_b^a \bar{E}\cdot d\bar{l}}_{R}$$

$$-\int_a^b \bar{E}\cdot d\bar{l} - \int_b^a \bar{E}\cdot d\bar{l} = \mathcal{E} - IR = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R}}$$

Aquí consideramos que la fem no tiene resistencia interna.

En el caso de una fem real, con resistencia interna



$$V_c - V_a = (V_c - V_b) + (V_b - V_a)$$

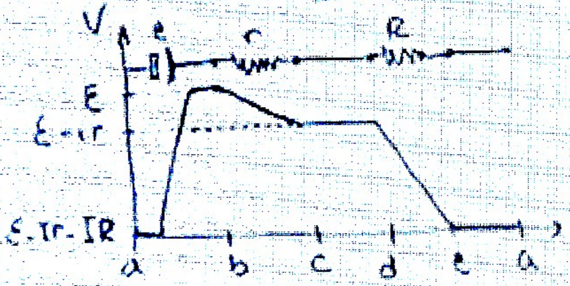
$$V_c - V_a = -Ir + \varepsilon$$

Si consideramos que en el circuito cerrado la diferencia de potencial es nula debido a que,

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$$

$$(V_c - V_a) + (V_e - V_d) = -Ir + \varepsilon - IR = 0$$

$$\boxed{I = \frac{\varepsilon}{R + r}}$$



En la figura puede verse como varía el potencial eléctrico a lo largo del circuito.

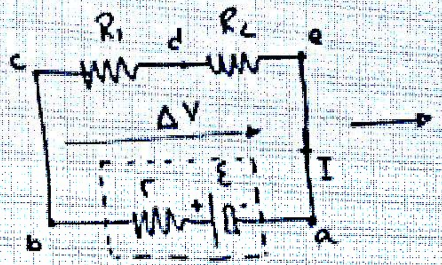
Sube en la fem, cae en las resistencias y permanece constante en los cables

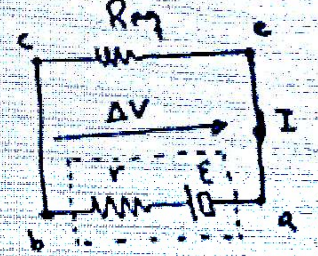
Finalmente, la energía suministrada por la fem resulta

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dq}\frac{dq}{dt} = \varepsilon I$$

$$P = \underbrace{\varepsilon I}_{\text{Potencia suministrada x la batería}} = I\,I(R + r) = \underbrace{I^2R + I^2r}_{\text{Potencia disipada por las resistencias por efecto Joule}}$$

Resistencias en serie y en paralelo

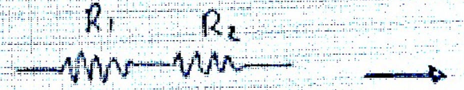




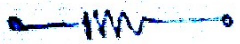
$$\Delta V = \varepsilon - Ir = IR_1 + IR_2 \qquad \Delta V = \varepsilon - Ir = IR_{eq}$$

$$\Rightarrow I R_{eq} = I(R_1 + R_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{eq} = (R_1 + R_2)}$$



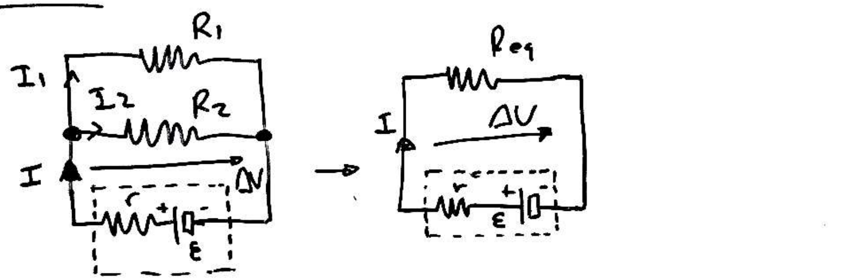
$$R_{eq} = R_1 + R_2$$



de manera general

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

Paralelo



En este caso ΔV es la misma en R_1 y R_2

$$I_1 = \frac{\Delta V}{R_1} = \frac{\varepsilon - rI}{R_1}$$

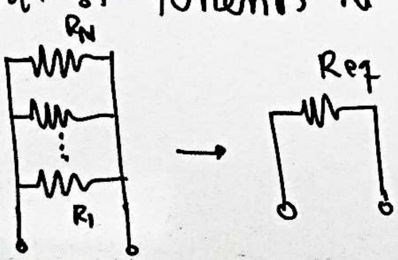
$$I_2 = \frac{\Delta V}{R_2} = \frac{\varepsilon - rI}{R_2}$$

Por otro lado $\quad I = I_1 + I_2$

$$\frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

de manera general si tenemos N resistencias en paralelo



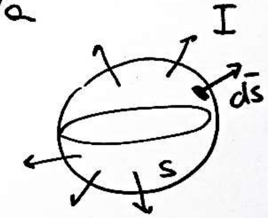
$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}}$$

Reglas de Kirchoff

Definimos la relación entre $\bar{j}$ e I como,

$$I = \iint_S \bar{j} \cdot d\bar{s}$$

Si S es una superficie cerrada



$$I = \oiint_S \bar{j} \cdot d\bar{s} = -\frac{dQ}{dt}$$

podemos escribir que

$$\oiint_S \bar{j} \cdot d\bar{s} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_v \, dv$$

Usando el teorema de la divergencia

$$\oiint_S \bar{j} \cdot d\bar{s} = \iiint_{Vol} \nabla \cdot \bar{j} \, dv = \iiint_{Vol} -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \, dv$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \bar{j} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}}$$

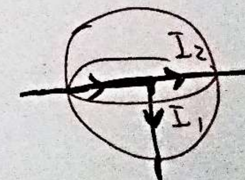
Ecuación de continuidad

para corrientes estacionarias $\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \Rightarrow$

$$\nabla \cdot \bar{j} = 0 \Rightarrow \boxed{\oiint_S \bar{j} \cdot d\bar{s} = 0}$$

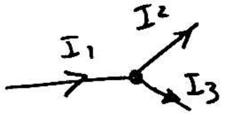
que puede escribirse como

1ra ley de Kirchoff $\quad \boxed{\sum_j I_j = 0}$



1ra Ley de Kirchoff:

La sumatoria de las corrientes que llegan a un nodo es igual a la sumatoria de las corrientes que salen del nodo.



$$\sum_i I_i = 0$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Obs: Las corrientes q' llegan se consideran positivas y las que salen negativas.

2da ley de Kirchoff:

La segunda Ley se fundamenta en el resultado

$$\oint \bar{E} \cdot \bar{dl} = 0$$

en este caso, la segunda ley se aplica a una malla cerrada de un circuito.

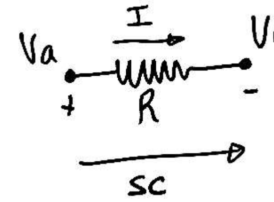
En una malla cerrada la suma algebraica de las fem es igual a la suma de las caídas de potencial existentes en las resistencias que forman la malla.

$$\sum_i \varepsilon_i = \sum_{jk} R_j I_k$$

O en una malla cerrada

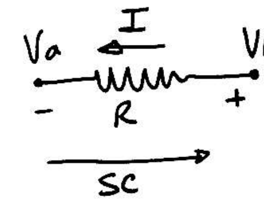
$$\sum_i \Delta V_i = 0$$

Reglas para determinar ΔV



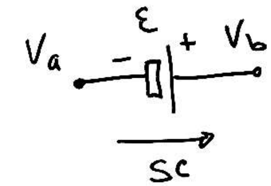
$V_a > V_b$

$V_b - V_a = -IR$



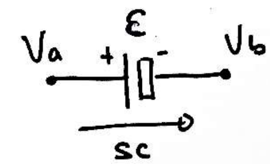
$V_a < V_b$

$V_b - V_a = IR$



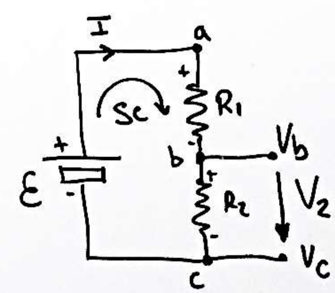
$V_a < V_b$

$V_b - V_a = \varepsilon$



$V_b - V_a = -\varepsilon$

Ejemplo: Divisor de tensiones



Aplicamos la 2da ley de Kirchoff:

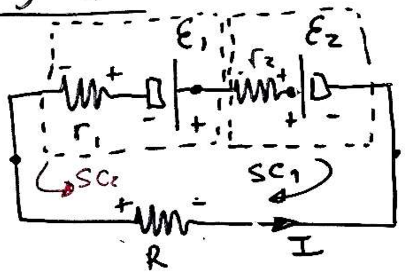
$$\varepsilon - IR_1 - IR_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$$

luego la diferencia de potencial V_2 resulta:

$$\boxed{V_2 = IR_2 = \frac{\varepsilon R_2}{R_1 + R_2}}$$

Ejemplo:



$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$

Para calular la corriente utilizamos la 2da Ley de Kirchoff, recorriendo la malla según el sentido de circulación horario SC_1

$$-\varepsilon_2 + IR + Ir_1 + \varepsilon_1 + Ir_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(R + r_1 + r_2)}$$

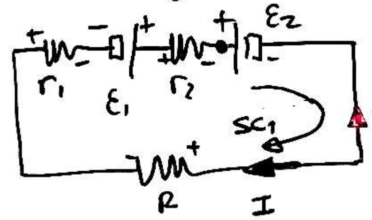
Observar que como $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ resulta que $I > 0$ es decir la corriente I tiene la dirección elegida

Si elegimos el sentido SC_2 tenemos que la 2da ley de Kirchoff resulta:

$$-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - Ir_1 - Ir_2 - IR = 0$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{R + r_1 + r_2}$$

Si elegimos la corriente en sentido contrario y SC_1

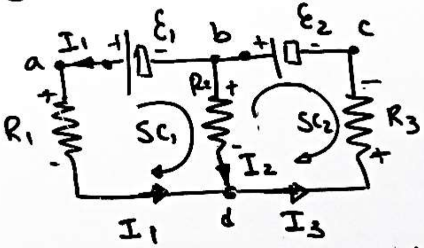


$$-\varepsilon_2 - IR - Ir_1 + \varepsilon_1 - Ir_2 = 0$$

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R + r_1 + r_2} = I < 0$$

Este resultado nos dice que la corriente I va en el sentido opuesto al elegido

Ejemplo:



Resolver el circuito en este caso significa encontrar I_1, I_2 e I_3.

Aplicamos la 1ra ley de Kirchoff en el nodo "d"

$$I_1 + I_2 = I_3 \rightarrow I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (1)$$

Aplicamos la 2do ley de Kirchoff en las mallas 1 y 2

malla 1) $-\varepsilon_1 - I_2R_2 + I_1R_1 = 0 \rightarrow I_1R_1 - I_2R_2 = \varepsilon_1$ (2)

malla 2) $-\varepsilon_2 + I_3R_3 + I_2R_2 = 0 \rightarrow I_2R_2 + I_3R_3 = \varepsilon_2$ (3)

tenemos las ecuaciones

① $I_1+I_2-I_3=0$ $\qquad I_3=I_1+I_2$

② $I_1R_1-I_2R_2=\mathcal{E}_1$

③ $I_2R_2+I_3R_3=\mathcal{E}_2$

① → ③ $I_2R_2+I_1R_3+I_2R_3=\mathcal{E}_2$

$$I_1R_3+I_2(R_2+R_3)=\mathcal{E}_2$$

④ $I_1=\dfrac{\mathcal{E}_2-I_2(R_2+R_3)}{R_3}$

④ → ② $\dfrac{\mathcal{E}_2R_1}{R_3}-\dfrac{I_2R_1(R_2+R_3)}{R_3}-I_2R_2=\mathcal{E}_1$

despejamos I_2:

$$\mathcal{E}_2\frac{R_1}{R_3}-\mathcal{E}_1=I_2\left[\frac{R_1}{R_3}(R_2+R_3)+R_2\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{I_2=\frac{\mathcal{E}_2R_1-\mathcal{E}_1R_3}{R_1(R_2+R_3)+R_2R_3}}$$

I_2 → ④

$$I_1=\frac{\mathcal{E}_2}{R_3}-\frac{(\mathcal{E}_2R_1-\mathcal{E}_1R_3)(R_2+R_3)}{(R_1(R_2+R_3)+R_2R_3)R_3}$$

Simplificando,

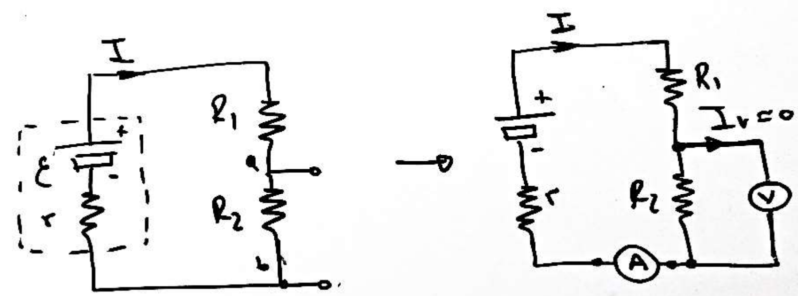
$$\boxed{I_1=\frac{\mathcal{E}_1(R_2+R_3)+\mathcal{E}_2R_2}{[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]}}$$

$$\boxed{I_3=\frac{\mathcal{E}_2(R_1+R_2)+\mathcal{E}_1R_2}{(R_1(R_2+R_3)+R_2R_3)}}$$

Medidas de corriente y diferencia de potencial.

Un medidor de corriente se denomina amperímetro

Un " de voltaje " " voltímetro

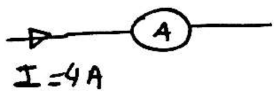


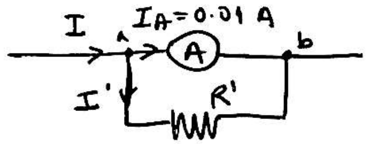
La resistencia interna del amperímetro debe ser pequeña, mientras q' la resistencia del voltímetro debe ser muy grande,

idealmente	en la realidad
$r_A\to 0$	$r_A \ll$
$r_V\to\infty$	$r_V \gg$

Ejemplo: Un medidor de corriente se desvía a escala completa para una corriente de 0.01 A. El medidor tiene una resistencia interna $R_{int} = 50\,\Omega$

¿Cómo puede hacerse para medir 4 A con este medidor?





En este caso $I' = 3.99\text{ A}$

$$V_a - V_b = 0.01\text{ A} \cdot 50\,\Omega = 0.5\text{ V}$$

$$\Rightarrow \boxed{R' = \frac{V_a - V_b}{I'} = \frac{0.5\text{ V}}{3.99\text{ A}} = 0.1253\,\Omega}$$