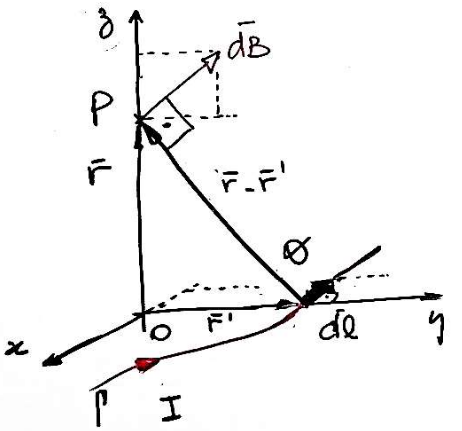
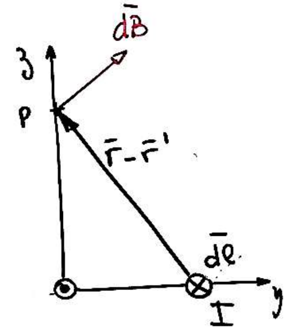
Fuentes de campo magnético

Corriente estacionaria - Ley de Biot-Savart

Así como un campo magnético $\bar{B}$ actúa sobre una carga eléctrica en movimiento, una corriente I estacionaria genera un campo magnético en un punto $\bar{r}$ en el espacio.





las propiedades del campo magnético en el punto P debido a un elemento del cable $d\bar{l}$ (fuente infinitesimal de corriente), resulta:

→ $d\bar{B} \perp d\bar{l}$ y también $d\bar{B} \perp \bar{r}-\bar{r}'$

→ la magnitud de $d\bar{B}$ es proporcional a $\dfrac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|^2}$

→ la magnitud de $d\bar{B}$ es proporcional a I y $d\bar{l}$

→ la magnitud de $d\bar{B}$ es proporcional a sen θ donde θ es el ángulo entre $d\bar{l}$ y $\bar{r}-\bar{r}'$

Luego la ley de Biot y Savart puede expresarse como

$$\boxed{\begin{aligned} d\bar{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\, I\, \frac{d\bar{l} \times \hat{e}_{\bar{r}-\bar{r}'}}{|\bar{r}-\bar{r}'|^2} \\ d\bar{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\, I\, \frac{d\bar{l} \times (\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3} \end{aligned}}$$

donde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ T\,\frac{m}{A}$

Si queremos conocer el campo magnético total debemos integrar a lo largo de todo el cable es decir:

$$\bar{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_\Gamma \frac{d\bar{l} \times (\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}$$

observar que nuevamente tenemos una integral vector.

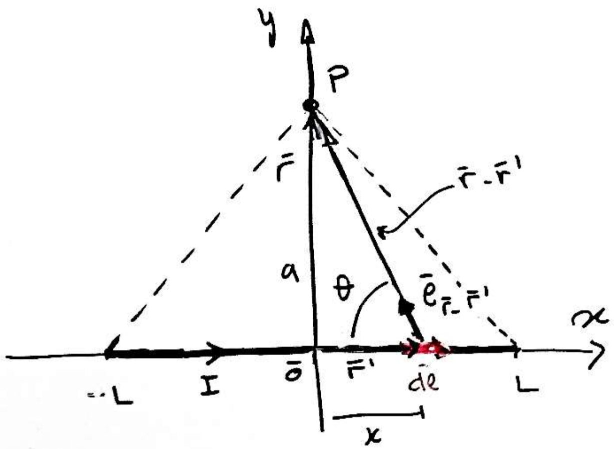
Si escribimos $d\bar{l} = dl\, \hat{e}_l$, resulta

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_\Gamma \frac{\hat{e}_l \times (\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}\, dl$$

$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\Gamma} \frac{\hat{e}_l \times (\bar{r}-\bar{r}')\, dl}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}$$ corriente unidimensional

recordar que $\frac{\bar{r}-\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|} = \hat{e}_{\bar{r}-\bar{r}'}$

Ejemplo: Campo magnético debido a un cable con corriente I finito.



$\bar{r}' = x\,\hat{e}_x$

$\bar{r} = a\,\hat{e}_y$

$\bar{r}-\bar{r}' = a\,\hat{e}_y - x\,\hat{e}_x$

$|\bar{r}-\bar{r}'| = (a^2+x^2)^{1/2}$

$d\bar{l} = dl\,\hat{e}_x = dx\,\hat{e}_x$

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\bar{l} \times (\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}$$

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(dx\,\hat{e}_x)\times(a\,\hat{e}_y - x\,\hat{e}_x)}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}$$

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a\,dx\,\hat{e}_z}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

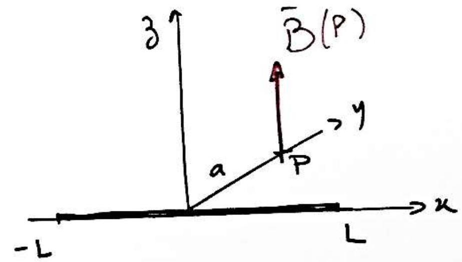
$\hat{e}_x \times \hat{e}_y = \hat{e}_z$

$$\bar{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\, a \int_{-L}^{L} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,\hat{e}_z$$

$$\Rightarrow \bar{B}(P) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \left.\frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}\right|_{-L}^{L} \hat{e}_z$$

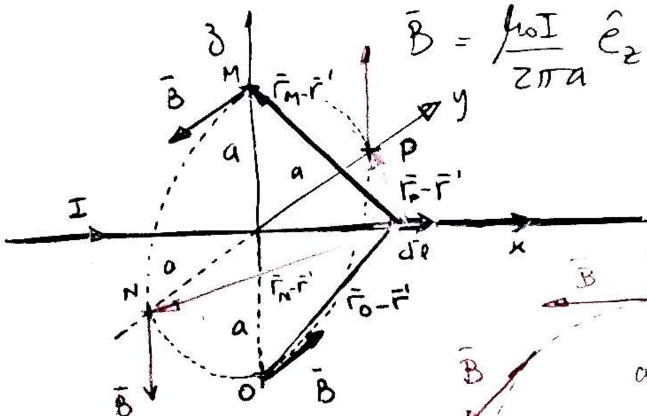
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\frac{L}{(L^2+a^2)^{1/2}} - \frac{-L}{(L^2+a^2)^{1/2}}\right]\hat{e}_z$$

$$\therefore \boxed{\bar{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{L}{(L^2+a^2)^{1/2}}\,\hat{e}_z}$$

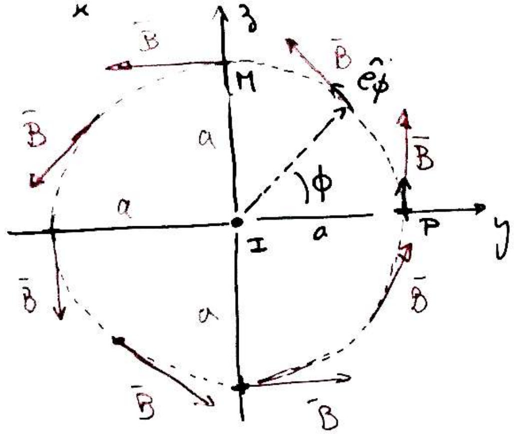


si $L \to \infty$ $\quad \bar{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{\cancel{L}}{\cancel{L}\left(1+\frac{a^2}{L^2}\right)^{1/2}}\,\hat{e}_z$ $\quad \frac{a^2}{L^2} \to 0$

$$\boxed{\bar{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\,\hat{e}_z}$$



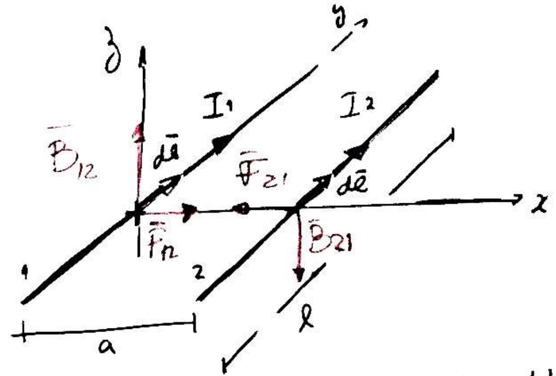
$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{e}_z$$



$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{e}_\phi$$

Fuerza entre dos cables paralelos

A partir de Biot-Savart vimos que una corriente de carga eléctrica genera un campo $\bar{B}$.
Pero también sabemos que una corriente de carga eléctrica en un $\bar{B}$ sufre una fuerza.
Por lo tanto, si tenemos 2 cables $\parallel$ q' transportan corriente, uno ejercerá una fuerza sobre el otro.



Existe una fuerza en el cable 1 debido a la corriente en el cable 2 y viceversa.

$$\bar{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\hat{e}_z$$

luego

$$d\bar{F}_{12} = I_1\, d\bar{l} \times \bar{B}_{12}$$

Si integramos, $\bar{F}_{12} = I_1 B_{12}\, l\, \hat{e}_x$

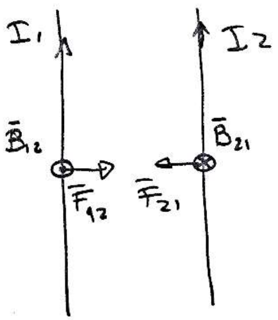
$$\Rightarrow \boxed{\bar{F}_{12} = \frac{\mu_0 l}{2\pi a} I_1 I_2\, \hat{e}_x}$$

de manera simétrica $\bar{B}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\hat{e}_z$ y

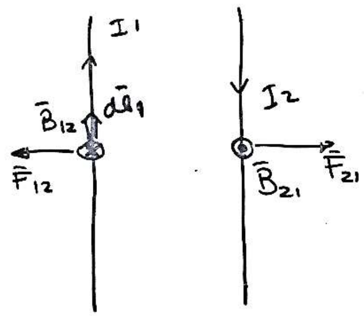
$$\bar{F}_{21} = -I_2 B_{21}\, l\, \hat{e}_x$$

$$\boxed{\bar{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}\hat{e}_x}$$

En el ejemplo que vimos



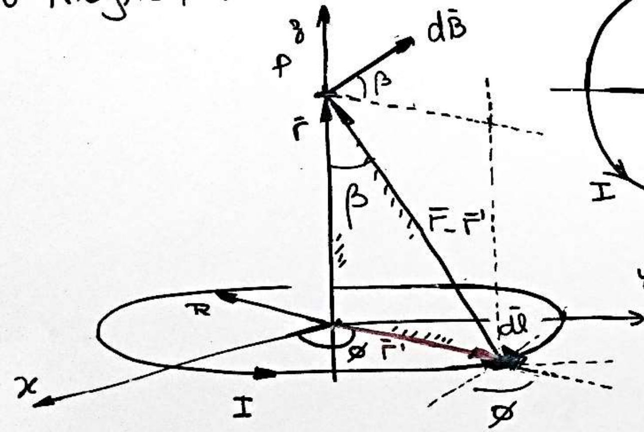
Dos corrientes en la misma dirección se atraen

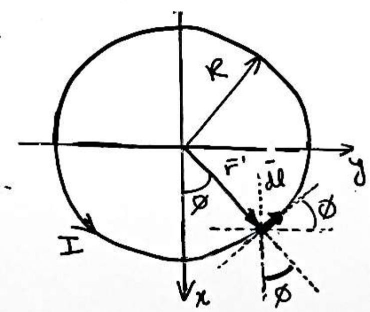


Dos corrientes en direcciones opuestas se repelen.

Ejemplo: Aplicación de Biot y Savart.

Campo magnético de un anillo.





$$d\bar B(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\bar l \times (\bar r - \bar r')}{|\bar r - \bar r'|^3} \qquad \hat e_{\bar r - \bar r'} = \frac{\bar r - \bar r'}{|\bar r - \bar r'|}$$

$$\bar r = z\,\hat e_z$$

$$\bar r' = R \,\text{sen}\,\phi\,\hat e_y + R\cos\phi\,\hat e_x$$

$$\bar r - \bar r' = -R\cos\phi\,\hat e_x - R\,\text{sen}\,\phi\,\hat e_y + z\,\hat e_z$$

$$|\bar r - \bar r'|^3 = (R^2 + z^2)^{3/2}$$

$$d\bar l = -\underbrace{R\,d\phi}_{dl}\,\text{sen}\,\phi\,\hat e_x + \overbrace{R\,d\phi}^{dl}\cos\phi\,\hat e_y$$

Realizamos el producto vectorial,

$$d\bar l \times (\bar r - \bar r') = \begin{vmatrix} \hat e_x & \hat e_y & \hat e_z \\ -R\,\text{sen}\,\phi\,d\phi & R\cos\phi\,d\phi & 0 \\ -R\cos\phi & -R\,\text{sen}\,\phi & z \end{vmatrix} =$$

$$= Rz\cos\phi\,d\phi\,\hat e_x + Rz\,\text{sen}\,\phi\,d\phi\,\hat e_y$$

$$+ (R^2\,\text{sen}^2\phi\,d\phi + R^2\cos^2\phi\,d\phi)\,\hat e_z =$$

$$= Rz\cos\phi\,d\phi\,\hat e_x + Rz\,\text{sen}\,\phi\,d\phi\,\hat e_y + R^2\,d\phi\,\hat e_z$$

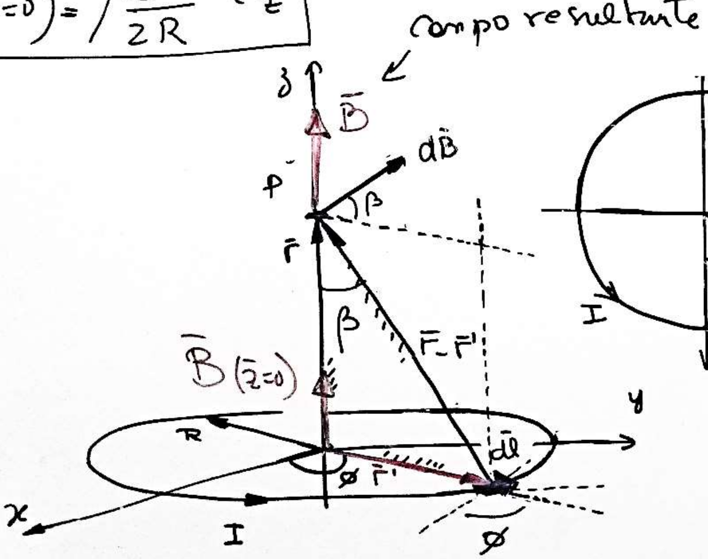
Hacemos la integral,

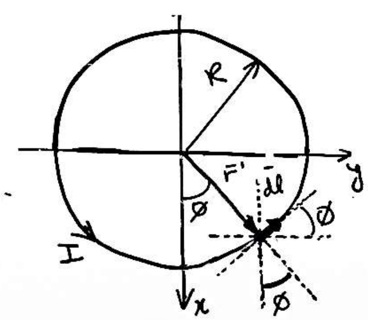
$$\bar{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int_0^{2\pi} \frac{Rz\cos\phi\, d\phi\, \hat{e}_x}{(z^2+R^2)^{3/2}} + \int_0^{2\pi} \frac{Rz\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\phi\, \hat{e}_y}{(z^2+R^2)^{3/2}} + \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\phi\, \hat{e}_z\right]$$

$$\boxed{\bar{B}(\bar{P}) = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{e}_z}$$

Si $z \to 0$

$$\boxed{\bar{B}(z=0) = \frac{\mu_0 I}{2R}\hat{e}_z}$$





$\nabla\cdot\bar{B}$ y $\nabla\times\bar{B}$ a partir de la ley de Biot y Savart

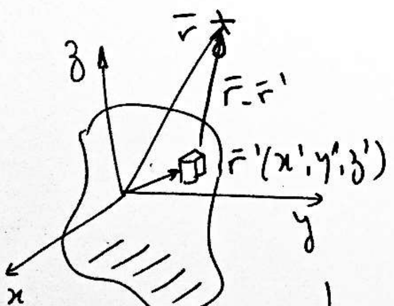
De manera general para una corriente eléctrica volumétrica, la ecuación de Biot y Savart se escribe como

$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\bar{j}(\bar{r}')\times(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}\,dv'$$

hay que notar que

$\bar{B}$ es función de (x,y,z)

$\bar{j}$ es función de (x',y',z')



$$\bar{r}-\bar{r}' = (x-x')\hat{e}_x + (y-y')\hat{e}_y + (z-z')\hat{e}_z$$

$$dv' = dx'\,dy'\,dz'$$

A continuación aplicamos la divergencia q' actúa en la variable (x,y,z) ∴

$$\nabla\cdot\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \nabla\cdot\left(\frac{\bar{j}(\bar{r}')\times(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}\right)dv'$$

Si usamos la relación:

$$\nabla\cdot(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{B}\cdot\nabla\times\bar{A} - \bar{A}\cdot\nabla\times\bar{B}$$

si $\bar{A} = \bar{j}(\bar{r}')$ y $\bar{B} = \frac{\bar{r}-\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}$

nos queda,

$$\nabla\cdot\left(\bar{j}(\bar{r}')\times\frac{\bar{r}-\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}\right) = \frac{\bar{r}-\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\cdot\underbrace{\nabla\times\bar{j}(\bar{r}')}_{=0} - \underbrace{\bar{j}(\bar{r}')\cdot\nabla\times\frac{\bar{r}-\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla\cdot\bar{B}(\bar{r}) = 0}$$

Este resultado es para $\bar{B}$ lo que la ecuación

$$\nabla\cdot\bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

es para la electrostática.

Lo que nos dice este resultado es que no ∃ el monopolo magnético.

De la misma manera si aplicamos el rotor al campo $\bar{B}$ obtenemos que

$$\nabla\times\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \nabla\times\left(\bar{j}(\bar{r}')\times\frac{\bar{r}-\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\right)dv' = \mu_0\bar{j}(\bar{r})$$

Ley de Ampere

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla\times\bar{B}(\bar{r}) = \mu_0\bar{j}(\bar{r})}$$