Líneas equipotenciales

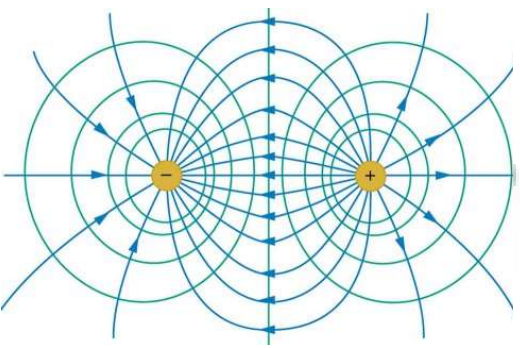
Supongamos que para una distribución de cargas calculamos
El valor del potencial eléctrico $V(\bar{r})$ en todo el espacio. Si
Estamos en 2D podemos graficar líneas de potencial constantes
O en 3D superficies de potencial constante.
Como el campo eléctrico es el gradiente del potencial eléctrico,

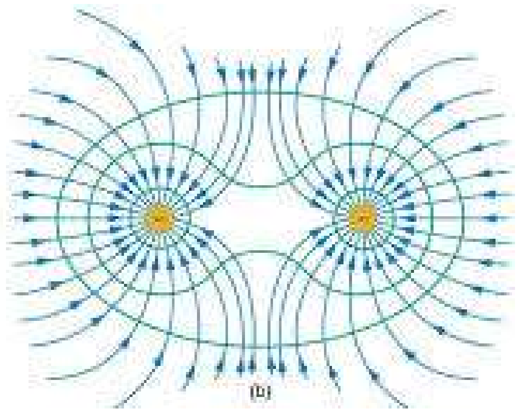
$$\bar{E} = -\nabla V$$

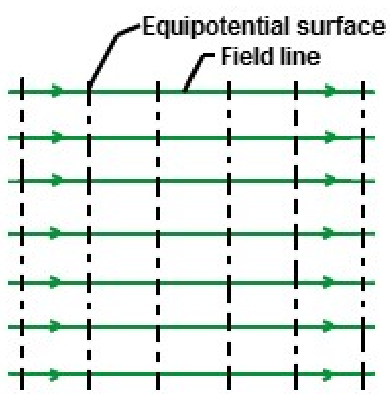
Tiene la propiedad de que es perpendicular a las superficies equipotenciales, es decir,

Las líneas de campo eléctrico $\bar{E}$ son perpendiculares a las superficies de igual potencial eléctrico.

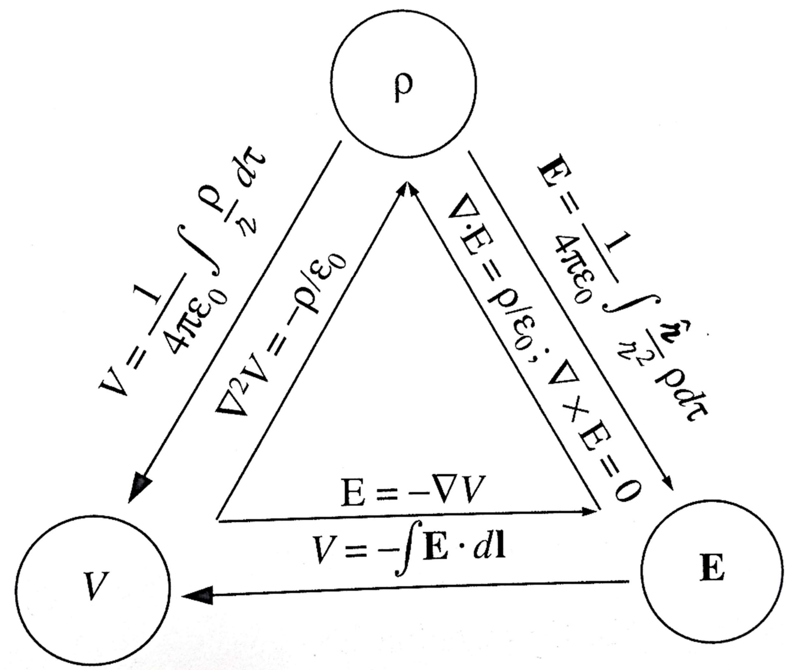
Ejemplos,



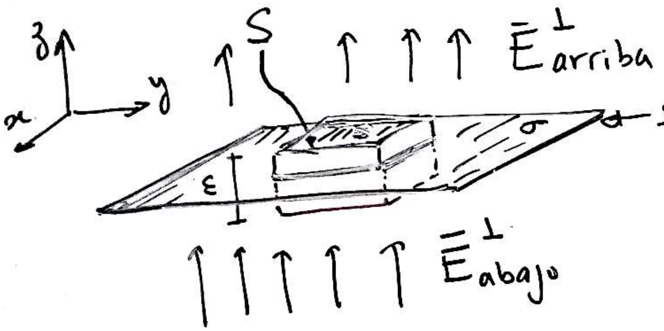


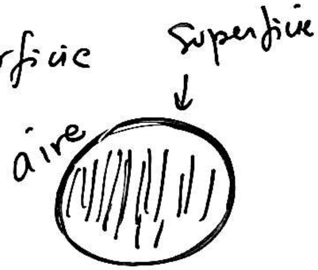


Relaciones entre ρ, V y $\bar{E}$



Condiciones de contorno de $\bar{E}$ y V



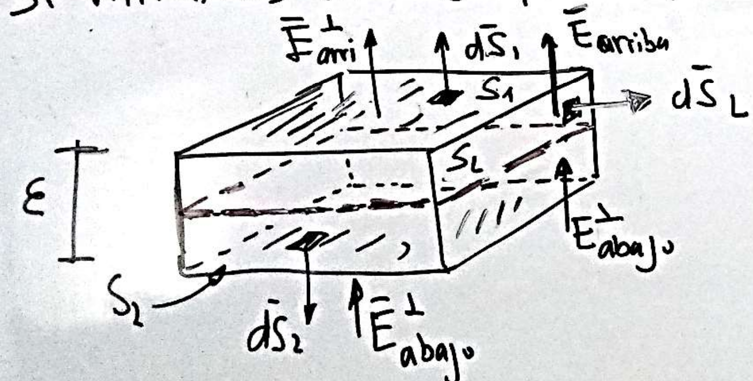


Suponemos que el campo eléctrico "arriba" y "abajo" es $\perp$ a la superficie y el campo es >0 cuando apunta en la dirección $+z$.

De acuerdo a la Ley de Gauss

$$\oiint_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

Si miramos la caja por separado



$$\oiint_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = \iint_{S_1} \bar{E}^{\perp}_{arriba}\cdot d\bar{S}_1 + \iint_{S_2} \bar{E}^{\perp}_{abajo}\cdot d\bar{S}_2 + \underbrace{\iint_{S_L} \bar{E}\cdot d\bar{S}_L}_{=0}$$

como $\bar{E} \perp d\bar{S}_L$

$\varepsilon \to 0$

$$\oiint_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = E^{\perp}_{arriba} S_1 - E^{\perp}_{abajo} S_2 = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

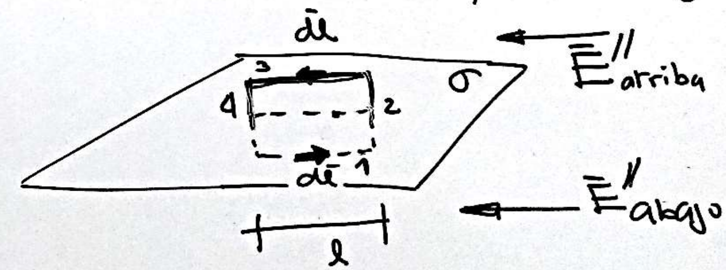
Como $S_1 = S_2 = S$ tenemos que

$$\boxed{E^{\perp}_{arriba} - E^{\perp}_{abajo} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

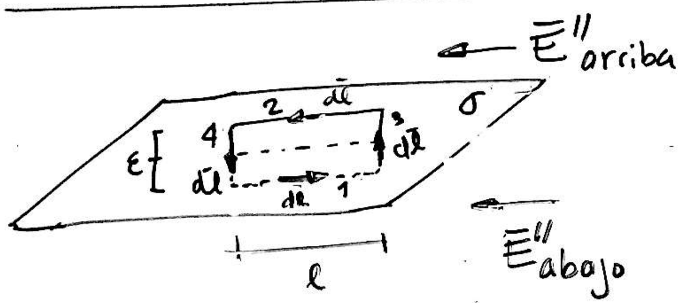
El campo $\bar{E}$ es discontinuo en una superficie por una cantidad σ/ε_0.

Si $\sigma = 0 \Rightarrow \boxed{E^{\perp}_{arriba} = E^{\perp}_{abajo}}$

Veamos el caso de la componente tangencial de $\bar{E}$



Condiciones de contorno de $\bar{E}$ y V



En este caso sabemos que

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$$

si resolvemos en el camino indicado,

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_1 \bar{E}''_{abajo} \cdot d\bar{l} + \int_2 \bar{E}''_{arriba} \cdot d\bar{l} + \underbrace{\int_3 \bar{E} \cdot d\bar{l}}_{=0} + \underbrace{\int_4 \bar{E} \cdot d\bar{l}}_{=0} = 0$$

En los segmentos 3 y 4 la $\int$ se anula porque $\bar{E}$ es $\perp$ al $d\bar{l}$ y además para ver qué sucede en la superficie $\varepsilon \to 0$

$$\therefore \int_1 \bar{E}''_{abajo} \cdot d\bar{l} + \int_2 \bar{E}''_{arriba} \cdot d\bar{l} = 0$$

Si el $\bar{E}''$ es cte en el segmento de longitud l resulta que,

$$-E''_{abajo}\, l + E''_{arriba}\, l = 0$$

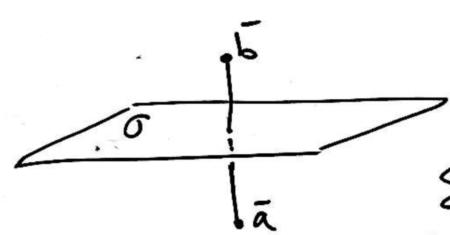
$$\boxed{E''_{abajo} = E''_{arriba}}$$

Es decir, la componente paralela a la superficie del campo eléctrico es continua al atravesar la superficie.

Estos resultados indican que

$$\boxed{\bar{E}_{arriba} - \bar{E}_{abajo} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\bar{n}}$$

Condiciones de contorno del potencial eléctrico



$$V(\bar{b}) - V(\bar{a}) = -\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

Si hacemos tender el segmento $\bar{a}\bar{b} \to 0$ es decir $\bar{a} \to sup$ y $\bar{b} \to sup$ $\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$

$\Rightarrow V(\bar{b}) - V(\bar{a}) = 0 \Rightarrow \boxed{V(\bar{a}) = V(\bar{b})}$

$\Rightarrow$ el potencial eléctrico es continuo en la sup.

Condiciones de contorno de $\bar{E}$ y V

Finalmente como

$$\bar{E}_{arriba} - \bar{E}_{abajo} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\bar{n} \qquad \underline{\bar{E} = -\nabla V}$$

$$-\left(\nabla V_{arriba} - \nabla V_{abajo}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\bar{n}$$

Si tenemos en cuenta que

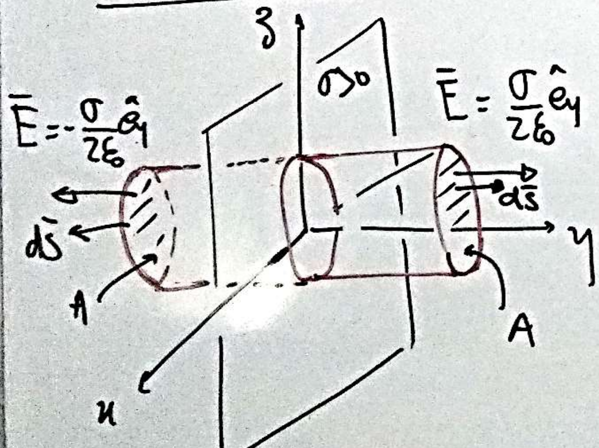
$$\nabla V \cdot \hat{n} = \frac{\partial V}{\partial n}$$

resulta que

$$\boxed{\frac{\partial V_{arriba}}{\partial n} - \frac{\partial V_{abajo}}{\partial n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Ejemplos

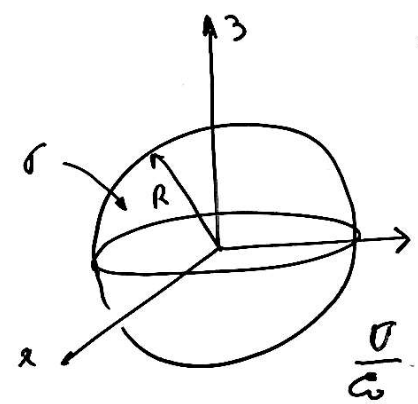
Plano infinito

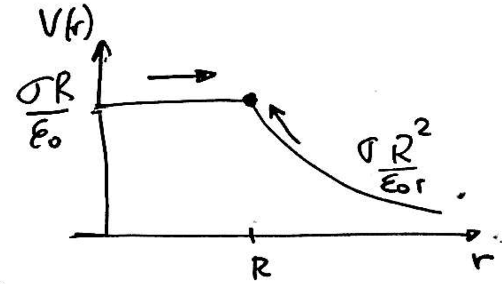


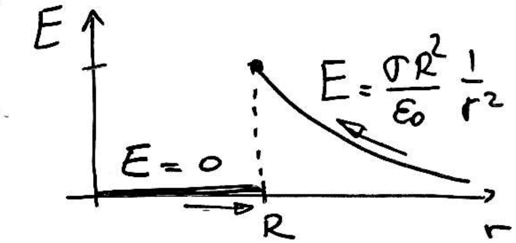
$$\cdot\ E^{\perp}_{arriba} - E^{\perp}_{abajo} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\cdot\ E^{\parallel}_{arriba} = E^{\parallel}_{abajo} = 0$$

Casquete esférico







$$\underbrace{R+\delta} \qquad \underbrace{R-\delta} \qquad \delta \to 0$$

$$\cdot\ E^{\perp}_{arriba} - E^{\perp}_{abajo} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 \cancel{R^2}} - 0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\cdot\ E^{\parallel}_{arriba} - E^{\parallel}_{abajo} = 0 - 0 = 0$$

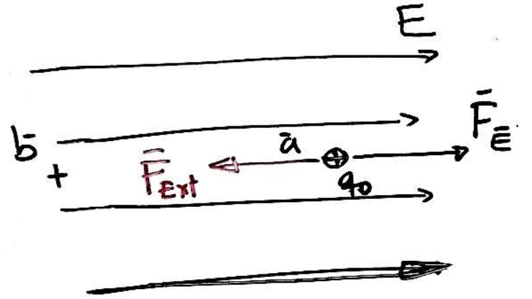
$$\cdot\ V_{arriba} - V_{abajo} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} = 0$$

$$V_{arriba} = V_{abajo}$$

en la interface.

Potencial eléctrico y Trabajo

Consideremos un campo eléctrico $\bar{E}$ uniforme y dos puntos $\bar{a}$ y $\bar{b}$



Si ponemos una carga de prueba q_0 en $\bar{a}$ sufre una fuerza

$$\bar{F}_{\bar{E}} = q_0 \bar{E}$$

Si un agente externo quiere mover la carga hasta el punto $\bar{b}$ a velocidad cte, resulta que

$$\bar{F}_{Ext} = -\bar{F}_{\bar{E}}$$

el trabajo realizado por esta fuerza es,

$$W_{\bar{a}\to\bar{b}} = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \bar{F}_{Ext} \cdot d\bar{l} = -\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} q_0 \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

$$W_{\bar{a}\to\bar{b}} = -q_0 \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \bar{E} \cdot d\bar{l} = q_0 \left(V(\bar{b}) - V(\bar{a})\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(\bar{b}) - V(\bar{a}) = \frac{W_{\bar{a}\to\bar{b}}}{q_0}}$$

Si ademas podemos poner el punto $\bar{a}$ en el infinito y ponerlo como referencia,

$$V(\bar{a}) = V(\infty) = 0$$

tenemos

$$V(\bar{b}) = \frac{W_{\infty\to\bar{b}}}{q_0}$$

Obs: El potencial eléctrico en el punto $\bar{b}$ es el trabajo por unidad de carga que es necesario realizar para llevar la carga hasta el punto $\bar{b}$

Es decir el potencial eléctrico es la energía potencial del sistema x unidad de carga.

Obs: Si el camino entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ no es lineal el resultado sigue valiendo

Obs: No se requiere trabajo para mover carga eléctrica en una superficie equipotencial

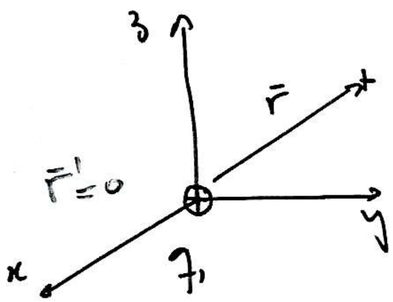
Si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ $\in$ a una sup. equip.

$$W_{\bar{a}\to\bar{b}} = q_0\left(V(\bar{b}) - V(\bar{a})\right) = 0$$

Trabajo y energía electrostática

Cargas puntuales

Supongamos las cargas q_1 y $q_2 > 0$, una de ellas q_2 en el ∞. Si q_1 está en el origen



$$V_1(\bar r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{|\bar r|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r}$$

Si traemos q_2 hasta $\bar r$ el trabajo realizado es

$$W_{EXT} = q_2 V_1(\bar r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2 q_1}{|\bar r|} = U_{pot}$$

Como las cargas son $>0 \Rightarrow W_{EXT} > 0$ es decir acumulamos energía potencial.

Si $q_2 < 0$, $W_{EXT} < 0$ por lo que $U_{pot} < 0$

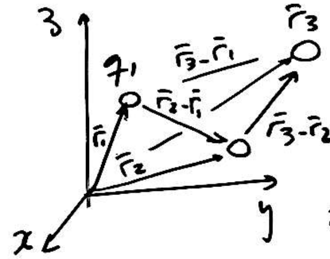
"La energía potencial de un grupo de cargas puntuales es el trabajo necesario para formar el sistema, trayendo las cargas de a una"

Si tenemos N cargas puntuales,

$$W_1 = 0$$

para la 2da carga eléctrica

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\bar r_2 - \bar r_1|} \quad V_1(\bar r_2)$$



$$W_3 = \overbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_3}{|\bar r_3 - \bar r_1|}}^{V_1(\bar r_3)} + \overbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2 q_3}{|\bar r_3 - \bar r_2|}}^{V_2(\bar r_3)}$$

Así siguiendo hasta la carga N-ésima

$$W = \sum_{i=1}^{N} W_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\underbrace{\frac{q_1 q_2}{|\bar r_2 - \bar r_1|}}_{W_2} + \underbrace{\frac{q_1 q_3}{|\bar r_3 - \bar r_1|} + \frac{q_2 q_3}{|\bar r_3 - \bar r_2|}}_{W_3} + \dots + \underbrace{\frac{q_1 q_N}{|\bar r_N - \bar r_1|} + \dots}_{W_N}\right]$$

Reacomodando,

$$\begin{aligned}
W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\Bigg[& \overbrace{\frac{q_1 q_2}{|\bar r_2 - \bar r_1|} + \frac{q_1 q_3}{|\bar r_3 - \bar r_1|} + \frac{q_1 q_4}{|\bar r_4 - \bar r_1|} + \dots + \frac{q_1 q_N}{|\bar r_N - \bar r_1|}}^{N-1} + \\
& \frac{q_2 q_1}{|\bar r_1 - \bar r_2|} + \overbrace{\frac{q_2 q_3}{|\bar r_3 - \bar r_2|} + \frac{q_2 q_4}{|\bar r_4 - \bar r_2|} + \dots + \frac{q_2 q_N}{|\bar r_N - \bar r_2|}}^{N-2} + \\
& \frac{q_3 q_1}{|\bar r_1 - \bar r_3|} + \frac{q_3 q_2}{|\bar r_2 - \bar r_3|} + \frac{q_3 q_4}{|\bar r_4 - \bar r_3|} + \dots + \frac{q_3 q_N}{|\bar r_N - \bar r_3|} + \\
& \vdots \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \overbrace{}^{N-(N-1)} \\
N-1 \rightarrow \; & \frac{q_{N-1} q_1}{|\bar r_1 - \bar r_{N-1}|} + \frac{q_{N-1} q_2}{|\bar r_2 - \bar r_{N-1}|} + \dots + \frac{q_{N-1} q_N}{|\bar r_N - \bar r_{N-1}|} \\
N-1 \rightarrow \; & \frac{q_N q_1}{|\bar r_1 - \bar r_N|} + \frac{q_N q_2}{|\bar r_2 - \bar r_N|} + \dots + \frac{q_N q_{N-1}}{|\bar r_{N-1} - \bar r_N|}\Bigg]
\end{aligned}$$

Trabajo y energía electrostática

Cargas puntuales

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\bar{r}_j - \bar{r}_i|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{|\bar{r}_j - \bar{r}_i|}}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V(\bar{r}_i)} = U_{pot}$$

Esta ecuación es válida para cargas puntuales!

Para una distribución continua de cargas la $\sum \to \int$ es decir que:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V(\bar{r}_i) \xrightarrow{\text{Volumen}} \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\bar{r}) V(\bar{r})\, dv$$

$$\xrightarrow{\text{Superficie}} \frac{1}{2} \iint_S \sigma(\bar{r}) V(\bar{r})\, ds$$

En este caso V y S son el volumen o la superficie donde está distribuida la carga eléctrica.

Se puede demostrar que

$$\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{V_\infty} E^2\, dv}$$

$V_\infty \neq U$

V_∞ es el volumen de todo el espacio

Obs 1: La energía potencial de una distribución continua de cargas es siempre positiva

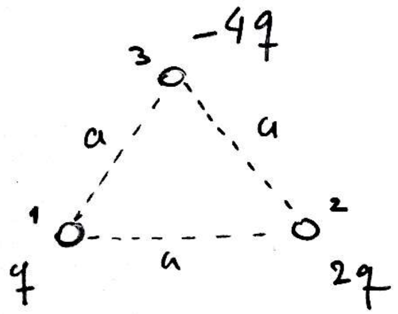
Obs 2: No aplica el principio de superposición en el cálculo de la energía.

Si $\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2$

$$\bar{E}^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\bar{E}_1 \cdot \bar{E}_2$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{V_\infty} E^2\, dv \neq \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{V_\infty} E_1^2\, dv + \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{V_\infty} E_2^2\, dv$$

Ejemplo 1



Usamos la ecuación

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} q_i V(\bar{r}_i)$$

$$W = \frac{1}{2}\left[q_1 V(\bar{r}_1) + q_2 V(\bar{r}_2) + q_3 V(\bar{r}_3)\right]$$

$$V(\bar{r}_1) = k_e\left[-\frac{4q}{a} + \frac{2q}{a}\right] = -k_e\frac{2q}{a}$$

$$V(\bar{r}_2) = k_e\left[-\frac{4q}{a} + \frac{q}{a}\right] = -k_e\frac{3q}{a}$$

$$V(\bar{r}_3) = k_e\left[\frac{q}{a} + \frac{2q}{a}\right] = k_e\frac{3q}{a}$$

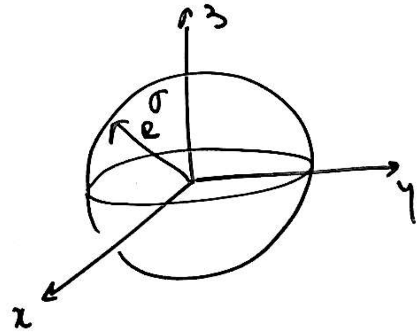
$$\boxed{W = \frac{1}{2}k_e\left[-\frac{2q^2}{a} - \frac{6q^2}{a} - \frac{12q^2}{a}\right] = -10\,k_e\frac{q^2}{a} = -\frac{5}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}}$$

Si usamos directamente la definición:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + k_e\frac{q\,2q}{a} + k_e\left[-4q\left(\frac{q}{a} + \frac{2q}{a}\right)\right] = k_e\left[\frac{2q^2}{a} - 12\frac{q^2}{a}\right] =$$

$$\boxed{W = -\frac{5}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}}$$

Ejemplo 2



Podemos usar la ecuación

$$W = \frac{1}{2}\iint_S \underbrace{\sigma(\bar{r})}_{cte}\,\underbrace{V(\bar{r})}_{cte}\,ds$$

En nuestro caso $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = cte$

y el potencial eléctrico es $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = cte$

$$\rightarrow W = \frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi R^2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}\iint_S ds$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\overbrace{\frac{Q}{\cancel{4\pi R^2}}}^{\sigma}\,\overbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}}^{V}\,\underbrace{\cancel{4\pi R^2}}_{\iint_S ds} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}}$$

Si usamos la ecuación,

$$\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{V_\infty} E^2\,dv} = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{V_{int}} E_{int}^2\,dv}_{=0} + \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{V_{ext}} E_{ext}^2\,dv$$

Como $\bar{E}_{int} = \bar{0}$; $W = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{V_{ext}} \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{Q^2}{r^4}r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$

$$\boxed{W = \frac{Q^2\,\overbrace{4\pi}^{\iint \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi}}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left.-\frac{1}{r}\right|_R^\infty = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$