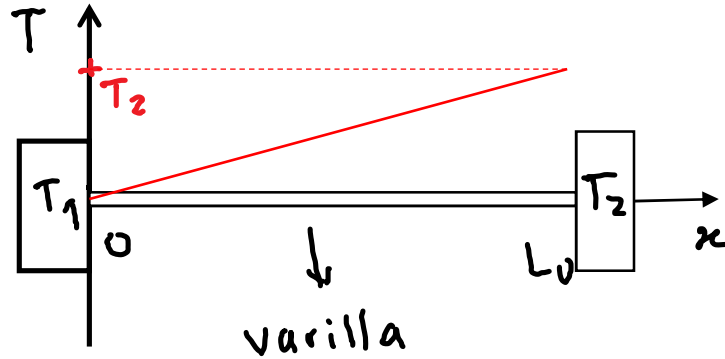


Campo escalar y vectorial

Campo escalar

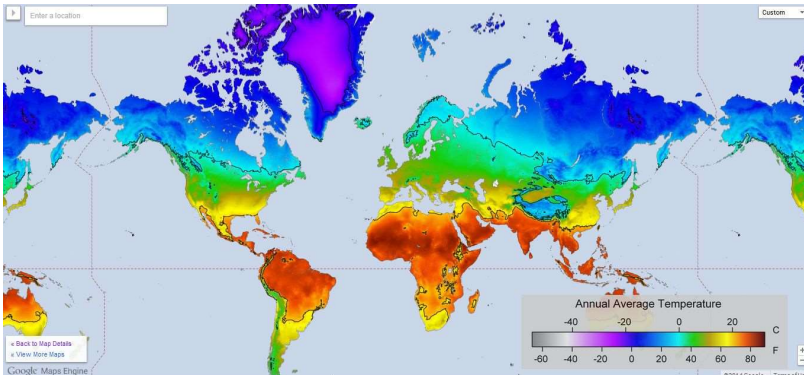
El campo escalar es una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. A cada punto de un espacio vectorial se le asocia el número $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.



la función que describe la temperatura en la varilla puede ser, por ejemplo,

$$T(x) = \frac{(T_2 - T_1)}{L_0} x + T_1$$

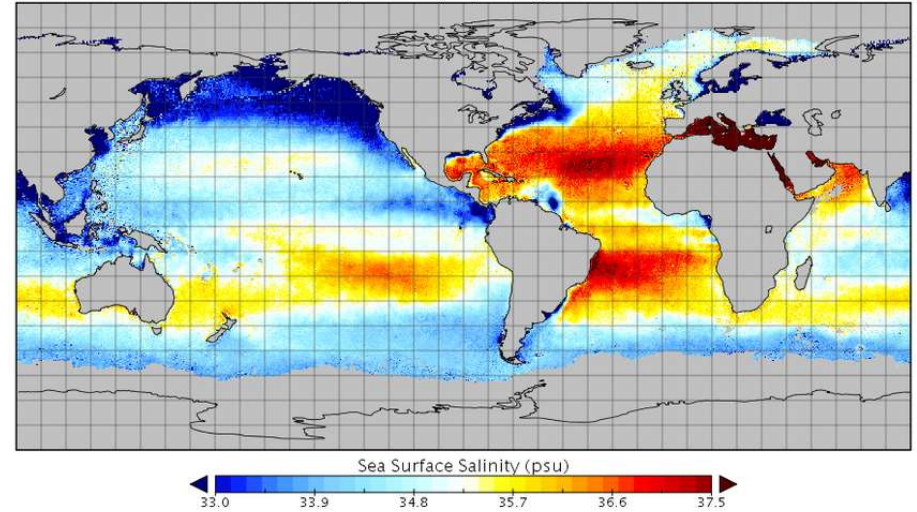
Lo mismo en 2 o 3 dimensiones, en 2D la función será $T = T(x, y)$ y en 3D la función $T = T(x, y, z)$. Es decir $T(x, y, z)$ describe la temperatura en cada punto $\vec{r}(x, y, z)$.



Otros ejemplos de campo escalar pueden ser por ejemplo, la presión atmosférica, la humedad, la salinidad del mar, etc.

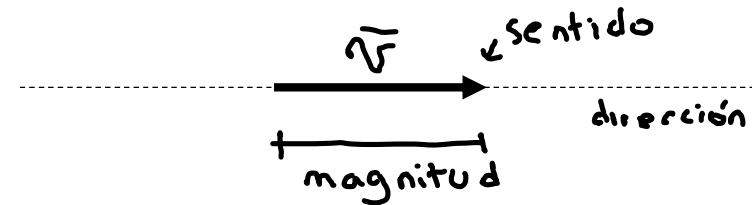
Sea Surface Salinity: Fusion with 3 psu filter

Descending orbits: 9 days map starting at 12-06-2014



Campo vectorial

Recordemos que un vector está caracterizado por una dirección, magnitud y sentido.



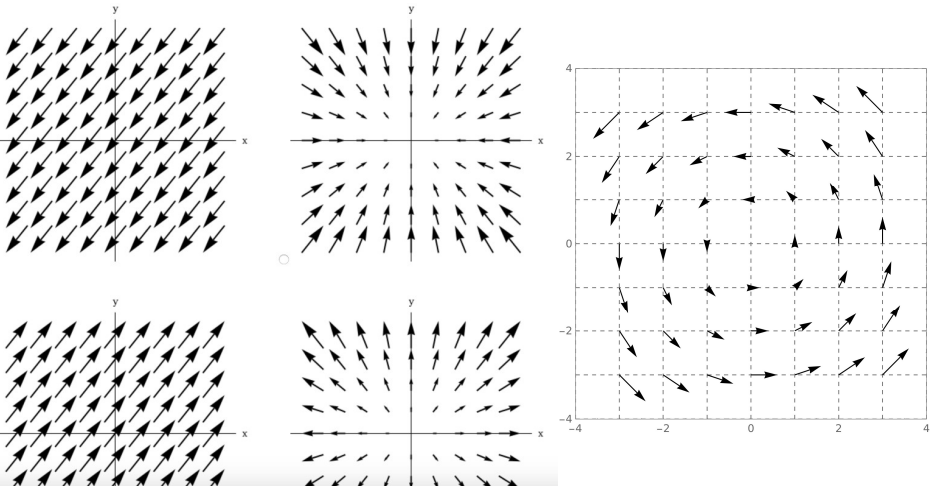
Lo utilizamos para describir magnitudes físicas, por ejemplo, velocidad, aceleración, fuerza, etc.

Para un sistema con un gran número de objetos, donde a cada uno de ellos tiene que ser descrito individualmente

con un vector (copos de nieve, gotas de lluvia, autos en la autopista, un fluido, etc)

estamos en presencia de un campo vectorial.

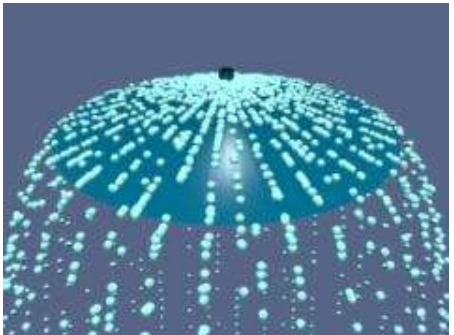
Entonces, como se vería un campo vectorial?



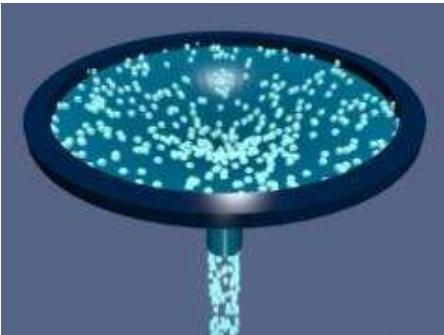
En \mathbf{R}^3 un campo vectorial puede ser descrito , de manera general, como:

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\vec{e}_x + F_y(x, y, z)\vec{e}_y + F_z(x, y, z)\vec{e}_z$$

Donde cada componente F_x, F_y y F_z son campos escalares. Una característica de los campos vectoriales son la presencia de fuentes y sumideros.



Fuente
(flujo divergente)



Sumidero
(flujo convergente)

En el caso de un campo vectorial , decimos que el punto $\vec{r}(x, y, z)$ actúa como fuente o sumidero si la divergencia del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ es mayor o menor que cero, veamos,

$$\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \left. \begin{array}{l} > 0 \text{ Fuente} \\ < 0 \text{ Sumidero} \end{array} \right\}$$

Recordemos que,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \right) \cdot (F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z)$$

Otra característica del campo vectorial es la "circulación" que se determina a partir del rotor del campo vectorial, es decir

$$\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)\vec{e}_z$$

El rotor es un campo vectorial es una medida de cuanto rota ese campo vectorial alrededor de un punto (x, y, z) .

(video sugerido <https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE>)

Electricidad: Acción a distancia vs. Teoría de Campos

Para explicar la interacción entre objetos materiales, antiguamente se pensaba en un mecanismo denominado

“acción a distancia”

Sólo es necesario la presencia de los objetos y el espacio vacío entre ellos, las fuerzas se transmiten instantáneamente,

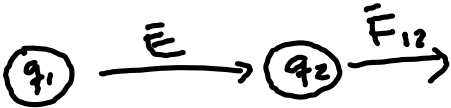
carga <==> carga



La teoría electromagnética introduce la noción de campo eléctrico \vec{E} que actúa como intermediario de las fuerzas entre las cargas eléctricas.

Si bien los objetos no están en contacto directo, existe el campo eléctrico \vec{E} , que establece una interacción del tipo,

carga <==> campo <==> carga



En el caso de dos cargas q_1 y q_2 , podemos pensar entonces que la carga q_1 genera un campo eléctrico \vec{E} , que actúa sobre q_2 generando una fuerza que denominamos \vec{F}_{12}

Definición de Campo Eléctrico

Para determinar el campo eléctrico \vec{E} generado por una carga q_1 en un punto en el espacio colocamos, una **carga de prueba** q_0 de carga positiva en un punto \vec{r} y medimos la fuerza eléctrica \vec{F} que actúa sobre q_0 , luego definimos el campo eléctrico en \vec{r} como,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Observar que el campo eléctrico \vec{E} es un vector. Una definición más rigurosa sería,

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Se necesita que q_0 sea pequeño de manera que no pertube el \vec{E} de otras cargas.

Esquemáticamente,

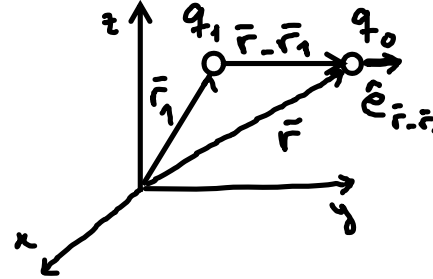


$$\vec{F}_{10} = -k_e \frac{q_1 q_0}{r^2} \hat{e}_{\vec{r}}$$

A partir de la definición de campo eléctrico, tenemos,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = -k_e \frac{q_1}{r^2} \hat{e}_{\vec{r}}$$

Si introducimos un sistema de referencia, resulta,



$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \hat{e}_{\vec{r}-\vec{r}_1}$$

Si tenemos varias cargas eléctrica, usamos el principio de superposición:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i^N \vec{E}_i(\vec{r})$$

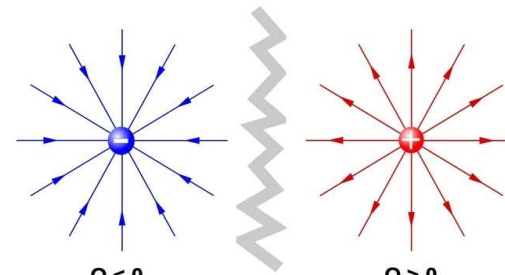
$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i^N k_e \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \hat{e}_{\vec{r}-\vec{r}_i}$$

Líneas de Campo Eléctrico

Las líneas de campo eléctrico son una herramienta gráfica para la representación de \vec{E} en el espacio debido a una carga eléctrica.

Carga puntual negativa

Carga puntual positiva



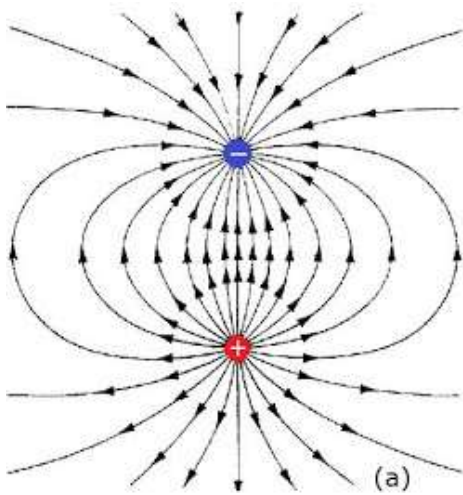
Líneas apuntan a la carga

Líneas parten de la carga

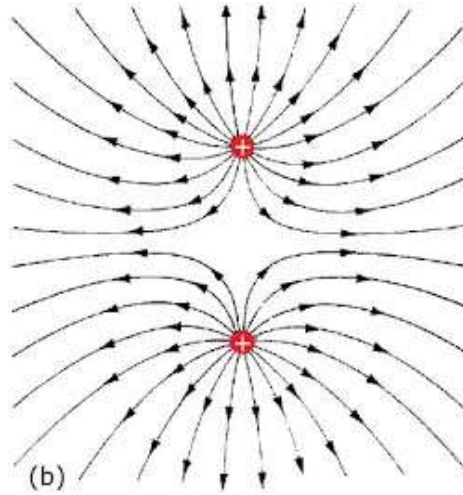
En ambos casos las líneas de campo son radiales.

- 1- Las líneas de campo comienzan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas y en el infinito
- 2- La tangente a una línea de campo en cualquier punto es la dirección del campo eléctrico
- 3- El número de líneas que se originan en una carga eléctrica es proporcional a la magnitud de la carga eléctrica
- 4- El número de líneas de campo por unidad de área transversal es proporcional al campo eléctrico
- 5- Las líneas de campo no se cruzan.

Ejemplo:



Dos cargas distintas



Dos cargas iguales

Distribución de carga eléctrica continua. Densidad de carga

Es posible encontrar un cuerpo o un objeto en el cual tengamos una distribución de cargas eléctricas. Estos objetos pueden ser:

- Volumétrico** → esfera
- Superficial** → casquete
- Lineal** → cable

Supongamos el caso de un cable con una distribución de carga uniforme λ (C/m). En un diferencial de longitud dl ,

$$dq = \lambda dl$$



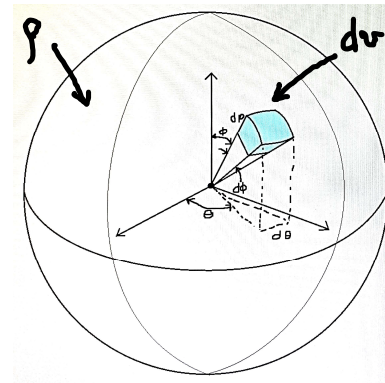
Si λ depende de la posición será $\lambda(\vec{r}')$,

De la misma manera sucede para una superficie o un volumen,

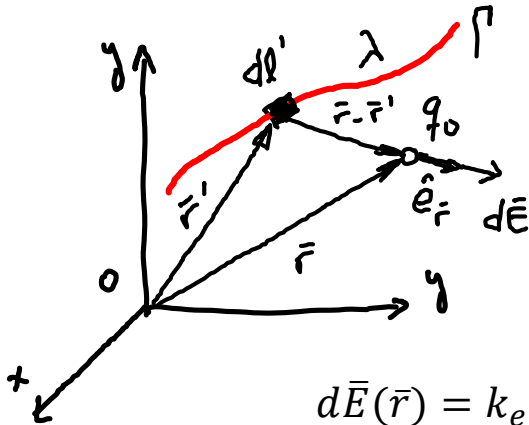
$$dq = \sigma ds \quad \sigma: \text{carga eléctrica por unidad de superficie}$$



$$dq = \rho dv \quad \rho: \text{carga eléctrica por unidad de volumen}$$



Supongamos el caso de una distribución lineal de carga, con una densidad de carga λ ,



$$d\bar{E}(\vec{r}) = k_e \frac{\lambda dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{e}_{\vec{r}-\vec{r}'}$$

Para conocer el campo eléctrico total en \vec{r} es necesario sumar el aporte de todo el cable, es decir que tenemos que aplicar el **Principio de Superposición** para el campo eléctrico,

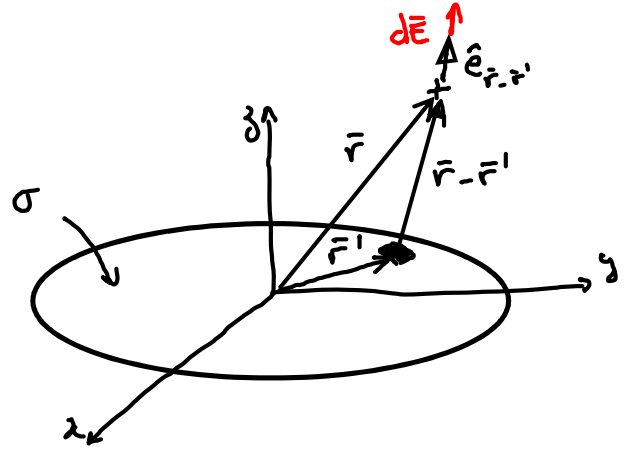
$$\bar{E}(\vec{r}) = k_e \int_{\Gamma} \frac{\lambda \hat{e}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dl'$$

Si λ no es constante,

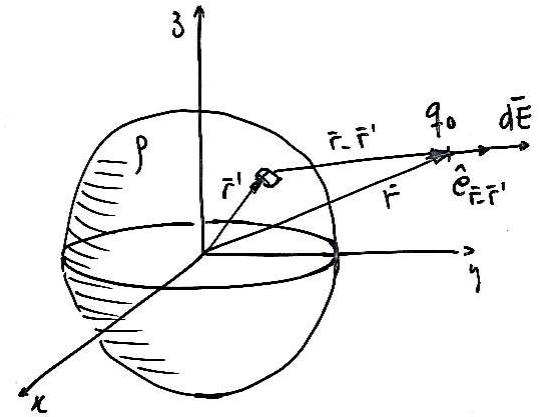
$$\bar{E}(\vec{r}) = k_e \int_{\Gamma} \frac{\lambda(\vec{r}') \hat{e}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dl'$$

De la misma manera extendemos este resultado a una superficie y a un volumen,

$$\bar{E}(\vec{r}) = k_e \iint_{Sup} \frac{\sigma \hat{e}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dl'$$



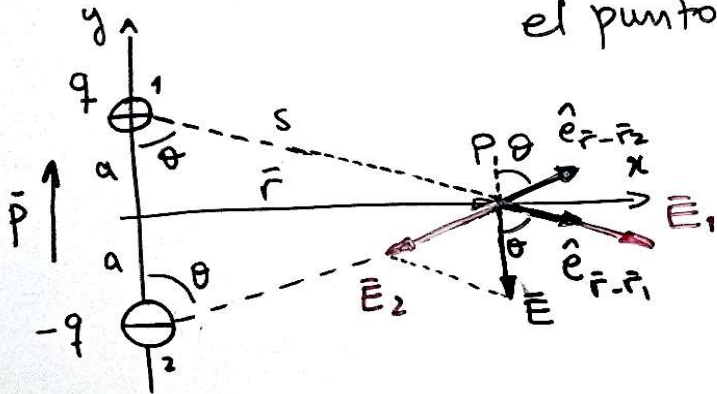
$$\bar{E}(\vec{r}) = k_e \iiint_{vol} \frac{\sigma \hat{e}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dl'$$



Estas integrales, son en realidad integrales vector, dado que tenemos 3 integrales, una para cada componente del campo eléctrico

Ejemplos

1. Dipolo eléctrico. Queremos calcular el campo eléctrico \vec{E} en el punto P



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_1 = k_e \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \hat{e}_{\vec{r} - \vec{r}_1}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = r \hat{e}_x - a \hat{e}_y \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}_1|^2 = r^2 + a^2$$

$$\hat{e}_{\vec{r} - \vec{r}_1} = \sin \theta \hat{e}_x - \cos \theta \hat{e}_y$$

$$\vec{E}_2 = -k_e \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^2} \hat{e}_{\vec{r} - \vec{r}_2}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_2 = r \hat{e}_x + a \hat{e}_y \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}_2|^2 = r^2 + a^2$$

$$\hat{e}_{\vec{r} - \vec{r}_2} = \sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y$$

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2 + a^2} (\sin \theta \hat{e}_x - \cos \theta \hat{e}_y) - k_e \frac{q}{r^2 + a^2} (\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y)$$

$$\vec{E} = -\frac{k_e q}{r^2 + a^2} 2 \cos \theta \hat{e}_y$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

$$\vec{E} = -k_e \frac{2qa}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \hat{e}_y$$

Si aproximamos que $r \gg a$ resulta que $(r^2 + a^2)^{3/2} = r^3 \left(1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)^{3/2} \approx r^3$

Si además denominamos $p = 2qa$ como el momento dipolar eléctrico

$$\vec{E} \approx -k_e \frac{p}{r^3} \hat{e}_y$$

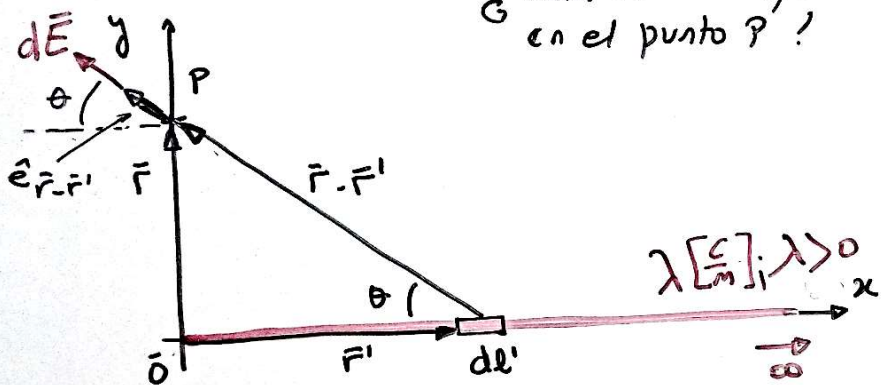
es decir

$$\vec{E} \approx k_e \frac{\vec{p}}{r^3}$$

Ejemplos

2 - Distribución lineal de carga eléctrica

¿Cuál es el campo eléctrico en el punto P?



$$dq = \lambda dl'$$

$$d\vec{E}(P) = k_e \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \hat{e}_{\vec{r}-\vec{r}'} = k_e \frac{\lambda dl'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \hat{e}_{\vec{r}-\vec{r}'}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^2 = \left| r \hat{e}_y - \underbrace{x \hat{e}_x}_{\vec{r}'} \right|^2 = r^2 + x^2$$

$$\hat{e}_{\vec{r}-\vec{r}'} = -\cos\theta \hat{e}_x + \sin\theta \hat{e}_y$$

$$dl' = dx$$

$$d\vec{E}(P) = k_e \frac{\lambda dx}{r^2 + x^2} (-\cos\theta \hat{e}_x + \sin\theta \hat{e}_y)$$

podemos escribir

$$\cos\theta = \frac{x}{(r^2+x^2)^{1/2}} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{r}{(r^2+x^2)^{1/2}}$$

$$d\vec{E}(P) = -k_e \lambda \frac{x dx}{(r^2+x^2)^{3/2}} \hat{e}_x + k_e \lambda \frac{r dx}{(r^2+x^2)^{3/2}} \hat{e}_y$$

$$\vec{E}(P) = -k_e \lambda \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(r^2+x^2)^{3/2}}}_{A} \hat{e}_x + k_e \lambda r \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{1}{(r^2+x^2)^{3/2}} dx}_{B} \hat{e}_y$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(r^2+x^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} \Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(r^2+x^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{r\sqrt{x^2+r^2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{r^2} - 0 = \frac{1}{r^2}$$

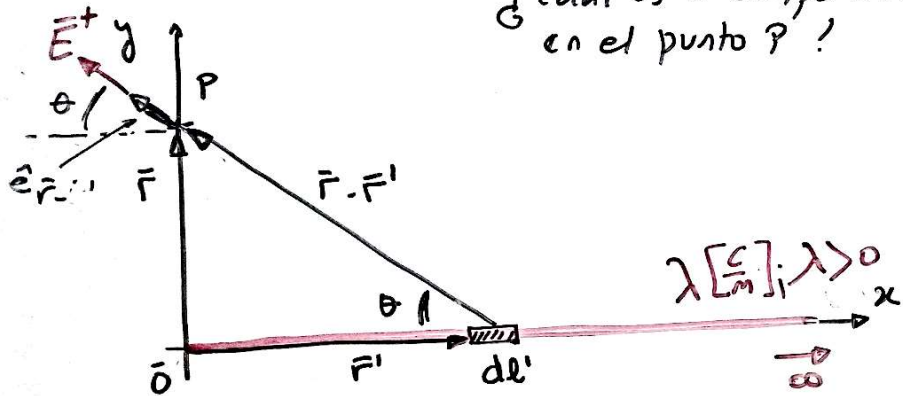
$$\therefore \vec{E} = -\frac{k_e \lambda}{r} \hat{e}_x + \frac{k_e \lambda}{r} \hat{e}_y$$

$$\vec{E} = \frac{k_e \lambda}{r} (-\hat{e}_x + \hat{e}_y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} (-\hat{e}_x + \hat{e}_y)$$

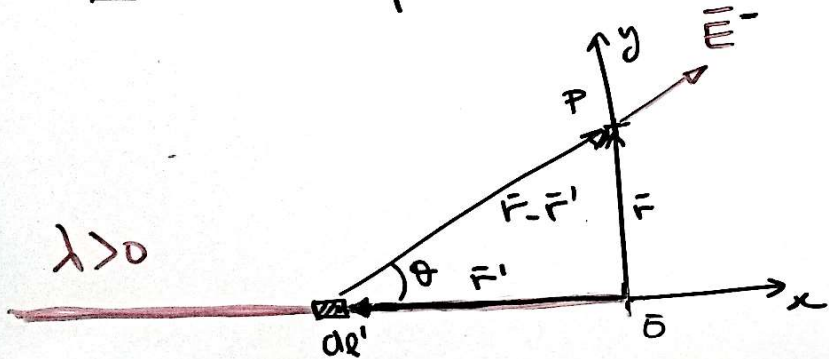
Ejemplos

2 - Distribución lineal de carga eléctrica

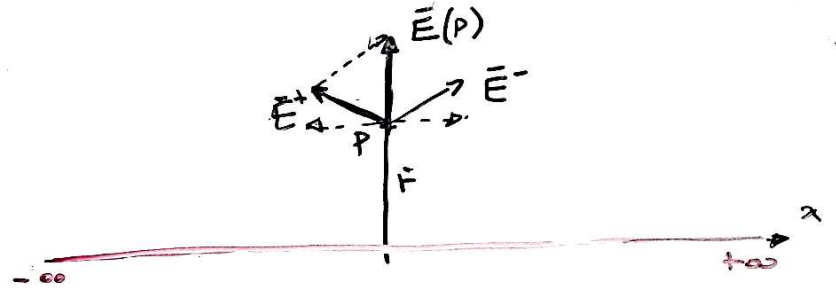
¿Cuál es el campo eléctrico en el punto P?



$$\vec{E}^+(P) = k_e \frac{\lambda}{r} (-\hat{e}_x + \hat{e}_y)$$



$$\vec{E}^-(P) = k_e \frac{\lambda}{r} (\hat{e}_x + \hat{e}_y)$$



$$\begin{aligned} \vec{E}(P) &= \vec{E}^+(P) + \vec{E}^-(P) = \\ &= k_e \frac{\lambda}{r} (-\hat{e}_x + \hat{e}_y + \hat{e}_x + \hat{e}_y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = k_e \frac{\lambda}{r} 2\hat{e}_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{e}_y}$$

