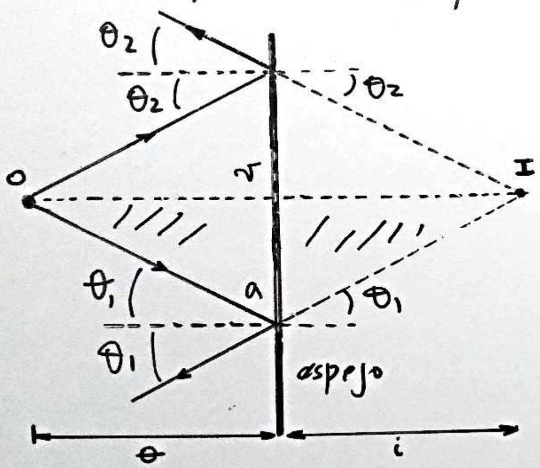
Espejos planos - ondas esféricas

Consideremos una fuente puntual de luz O (objeto) q' emite una onda esférica y se encuentra a una distancia "o" de un espejo.

Si graficamos los rayos reflejados y los extendemos por detrás del espejo se intercep tan en el punto I, que resulta la imagen de O.



Esta imagen es "virtual"

Los triángulos OVA y IVA son similares por lo que

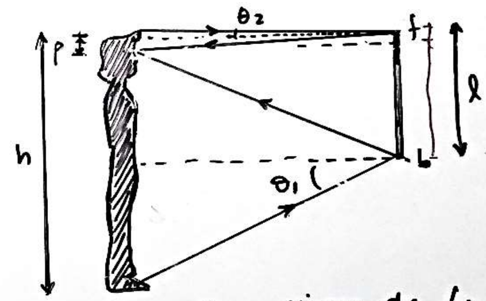
$$\boxed{o = -i}$$

En este caso el signo negativo indica que "i" se encuentra del lado opuesto de "o".

Si el objeto es una fuente extendida (no puntual) como por ejemplo una cabeza, también se forma una imagen punto a punto con la diferencia de q' la izquierda se intercambia con la derecha.

es decir la imagen de una mano derecha, es una mano izquierda.

Ejemplo: ¿Cuál es la altura de un espejo vertical para ver de manera completa una persona de altura h?



Si los ojos están a una distancia p de la parte + alta de la cabeza.

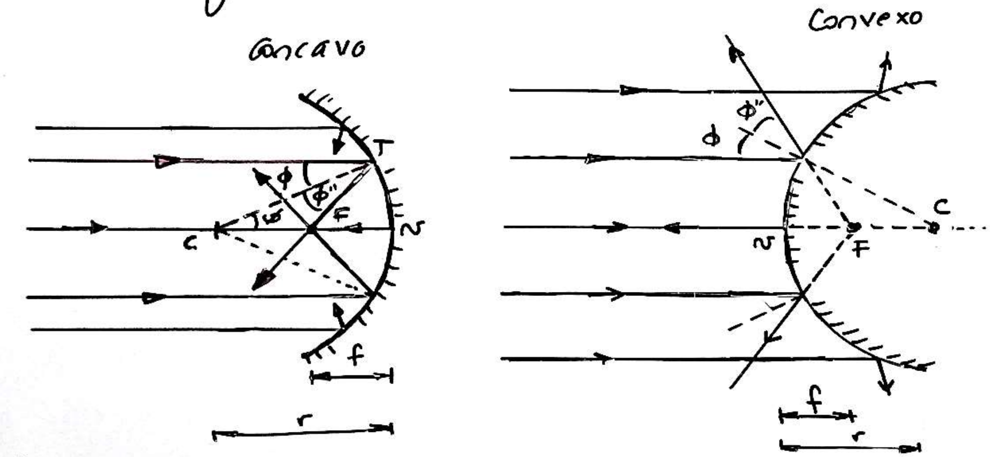
El haz q' proviene de la parte + alta se refleja en f y el haz que viene de la parte + baja en b para llegar a los ojos. La dimensión del espejo corresponde al segmento $\overline{fb}$

$$l = \overline{fb} = \frac{(h-p)}{2} + \frac{p}{2} = \frac{h}{2}$$

La altura del espejo tiene que ser 1/2 de la altura del objeto.

Espejos esféricos

En las figuras se muestra la reflexión de un haz de luz de rayos paralelos en un espejo cóncavo y uno convexo.



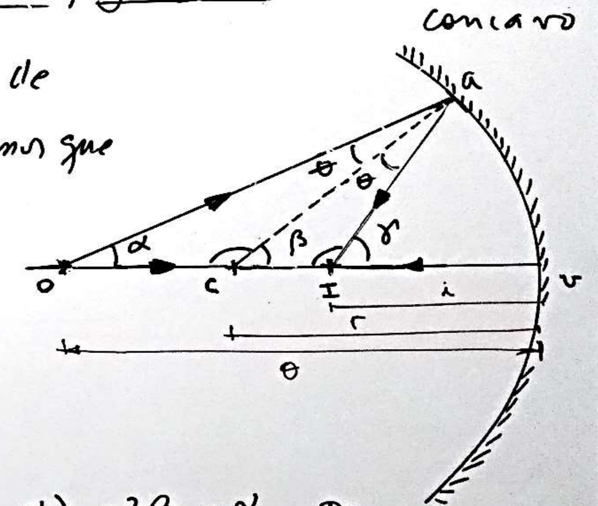
El haz de luz reflejado en estos espejos esféricos debe cumplir con la ley de reflexión de manera que $\phi = \phi'$

Por otra parte todos los rayos de luz (que son paralelos, es decir provienen del ∞) reflejados pasan por un punto en común en el caso de un espejo cóncavo y surgen de un punto en común en el caso de un espejo convexo, que denominamos punto focal (F).

Puede verse que el triángulo TCF es isósceles y en el límite que $\phi \to 0$ $\overline{CF} = \overline{FV}$ es decir que $\overline{FV} = \frac{1}{2}\overline{CV}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{f = \frac{r}{2}}$$

Ondas esféricas y espejos esféricos



De las propiedades de los triángulos tenemos que

$$\beta = \alpha + \theta$$
$$\gamma = \alpha + 2\theta$$

si $\theta = \beta - \alpha$

$\Rightarrow$ $\gamma = \alpha + 2(\beta - \alpha) = 2\beta - \alpha$ ó

$$\boxed{\gamma + \alpha = 2\beta}$$

Si en particular α es pequeño, es decir

$$\begin{cases} tg\,\alpha \approx \alpha \approx \dfrac{\overline{aV}}{\overline{OV}} \approx \dfrac{\overline{aV}}{o} \\ \beta = \dfrac{\overline{aV}}{r} \\ \gamma \approx \dfrac{\overline{aV}}{i} \end{cases}$$

Si además suponemos que el haz de luz surge del punto o con un ángulo $\alpha \ll$, luego podemos reemplazar en la ecuación

$$\alpha + \gamma = 2\beta$$

que queda
$$\frac{\overline{av}}{o} + \frac{\overline{av}}{i} = \frac{2\,\overline{av}}{r}$$

es decir
$$\boxed{\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f}}$$

Ecuación válida para espejos esféricos

observar que si $o \to \infty$
$$\boxed{i = f}$$

A partir de aquí es necesario establecer una convención de signos consistente para o, i y r.

Definimos dos lados el lado real (R) y el lado virtual (V)

El lado del espejo de donde viene la luz es el lado R

El lado posterior al espejo es el lado virtual o V.

<u>Convención de signos para espejos esféricos</u>

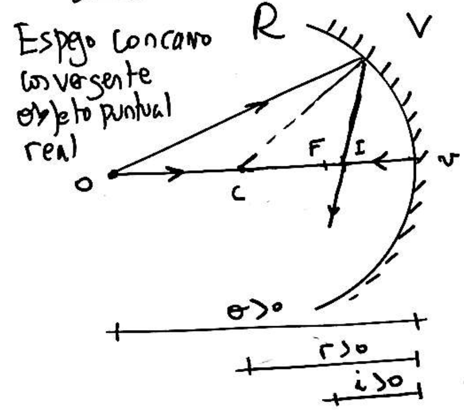
① $o, i > 0$ si la imagen se encuentra del lado R

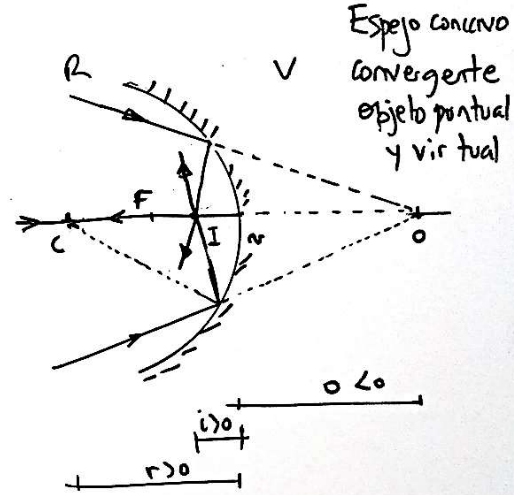
$o, i < 0$ si la imagen se encuentra del lado V

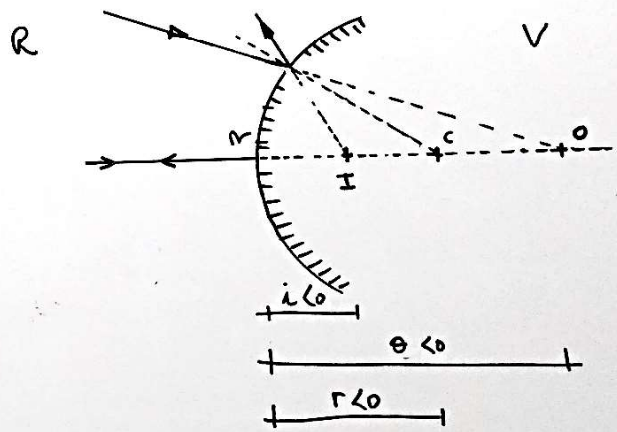
② $r > 0$ si el centro de curvatura se encuentra del lado R

$r < 0$ si está del lado V.

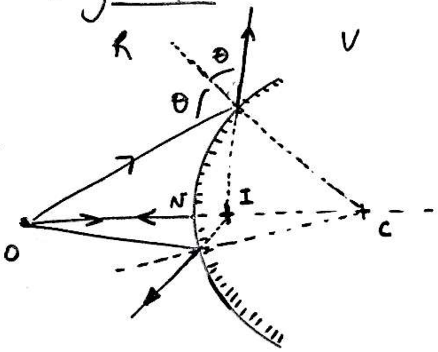
<u>Ejemplos</u>







Ejemplo: Para un espejo convexo tenemos



$o = 14\ cm \quad > 0$

$r = 20\ cm \quad r < 0$

Si usamos la fórmula para espejos esféricos

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{r}$$

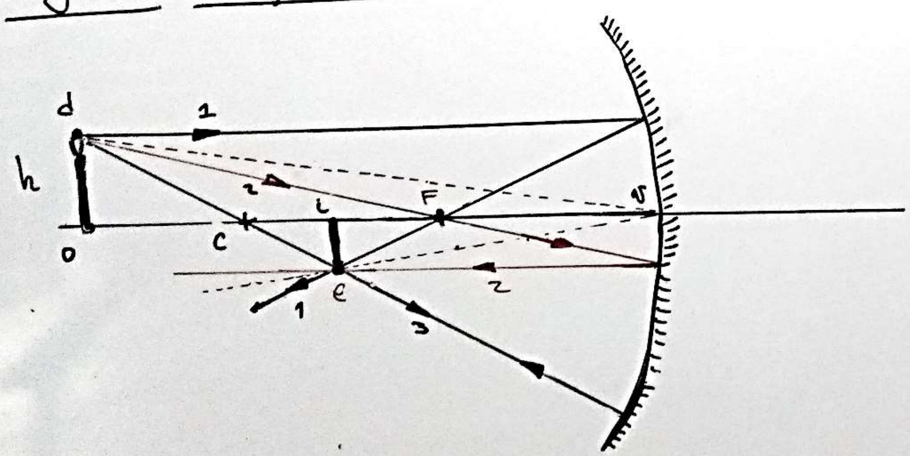
luego $\frac{1}{14\,cm} + \frac{1}{i} = -\frac{2}{20\,cm} = -\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{i} = -\frac{1}{10} - \frac{1}{14}$

$$\boxed{i = -5.83\ cm}$$

Si el haz viene del infinito $o \to \infty \Rightarrow i = -10\ cm$

Objetos no puntuales

cóncavo



Observando los triángulos ovd y ive podemos ver que son semejantes por lo tanto

$$\frac{ie}{od} = \frac{iv}{ov} = \frac{i}{o}$$

esta cantidad se denomina "aumento lateral" y se define arbitrariamente como

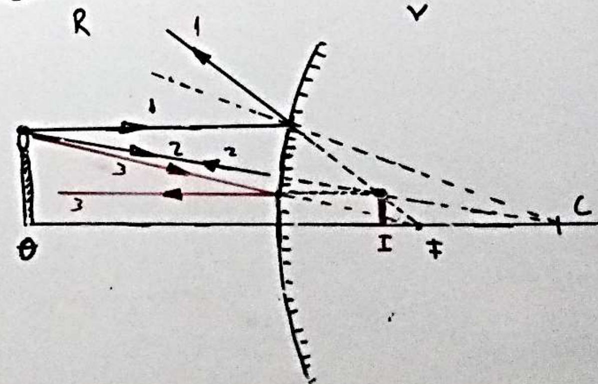
$$m = -\frac{i}{o}$$

por ejemplo en un espejo plano

$$o = -i \Rightarrow m = +1$$

La magnificación describe el aumento de un espejo ya sea esférico o plano. Si el signo es positivo $m > 0$ la imagen será derecha, si $m < 0$ la imagen será invertida.

Ejemplo: Espejo convexo



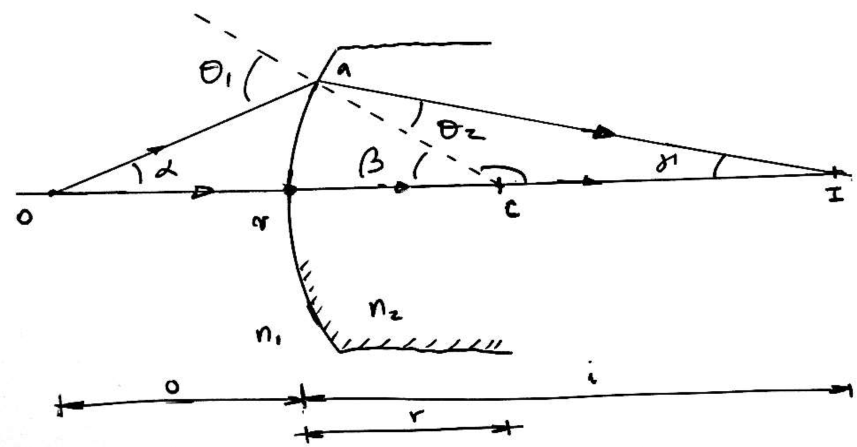
$r < 0$

$o > 0$

$i < 0$

$m = -\frac{i}{o}$

Superficies refractantes esféricas



Tenemos una fuente puntual O, cerca de una superficie refractante esférica convexa de radio r. La superficie esférica separa dos medios con $\neq$ índice de refracción n_1 y n_2.

Trazamos dos rayos, uno a través del punto v, el vértice de la superficie esférica y otro formando un ángulo α y que incide en la superficie en el punto a. En este punto se cumple la Ley de Snell

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

e intersecta al eje de la superficie esférica en I, que es la imagen de O.

De acuerdo a las propiedades de los triángulos.

$$\rightarrow \quad \theta_1 = \alpha + \beta$$
$$\beta = \theta_2 + \gamma$$

Si $\alpha \ll$ también lo son β, γ, θ_1 y θ_2 por lo tanto usamos la aproximación

$$\operatorname{sen} x \approx x$$

$\Rightarrow$ la ley de Snell nos queda,

$$n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 \approx \frac{n_1 \theta_1}{n_2}$$

$$\Rightarrow \qquad \beta \approx \frac{n_1}{n_2}\theta_1 + \gamma$$

más aún $\qquad \beta \approx \frac{n_1}{n_2}(\alpha + \beta) + \gamma$

reordenando $\qquad (n_2 - n_1)\beta \approx n_1 \alpha + n_2 \gamma$

si aproximamos

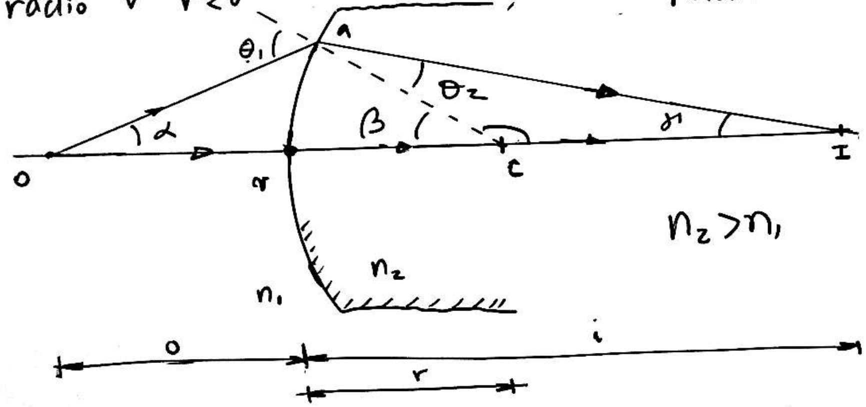
$$\beta = \frac{\overline{av}}{r}$$
$$\alpha \approx \frac{\overline{av}}{o}$$
$$\gamma \approx \frac{\overline{av}}{i}.$$

tenemos que

$$(n_2 - n_1)\frac{\overline{av}}{r} \approx n_1 \frac{\overline{av}}{o} + n_2 \frac{\overline{av}}{i}$$

objeto R $\theta > 0$
imagen V $i < 0$
radio V $r < 0$

objeto - V $\theta < 0$
imagen - R $i > 0$
radio - R $r > 0$



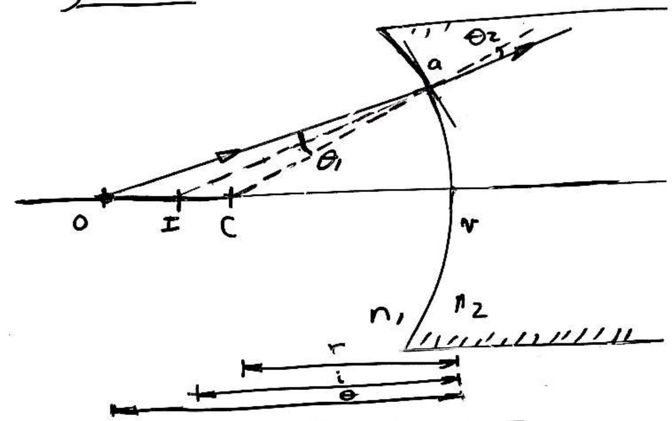
$$(n_2 - n_1)\frac{\cancel{av}}{r} \approx n_1 \frac{\cancel{av}}{\theta} + n_2 \frac{\cancel{av}}{i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(n_2 - n_1)}{r} \approx \frac{n_1}{\theta} + \frac{n_2}{i}}$$

recordemos que esta ecuación se cumple para haces de luz provenientes de objetos puntuales que se refractan en superficies esféricas formando un ángulo α pequeño.

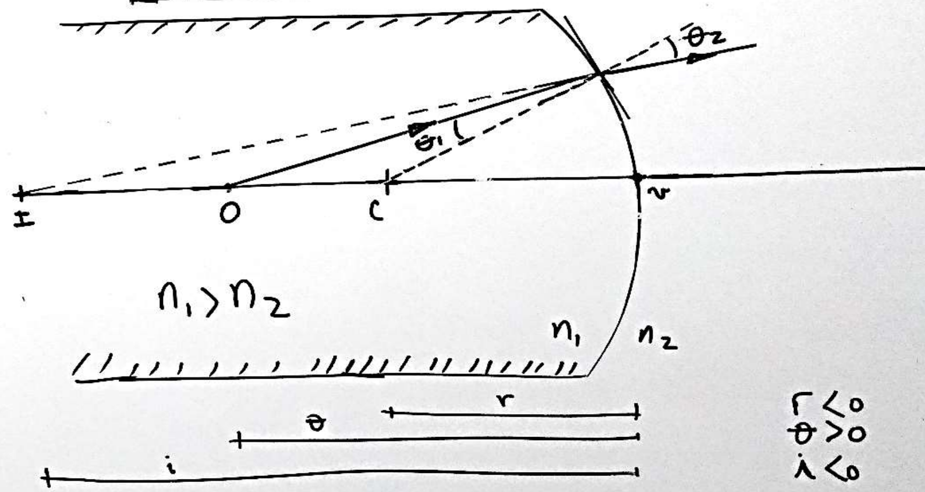
En este caso, al contrario de los espejos la imagen real se forma del lado opuesto a la superficie

Ejemplo



$n_2 > n_1$

$r < 0$
$i < 0$
$\theta > 0$



$r < 0$
$\theta > 0$
$i < 0$

Si $n_1 = 2$ $\quad n_2 = 1$ $\quad \theta = 15$ cm $\quad r = 10$ cm

usamos la fórmula para superficies refractantes,

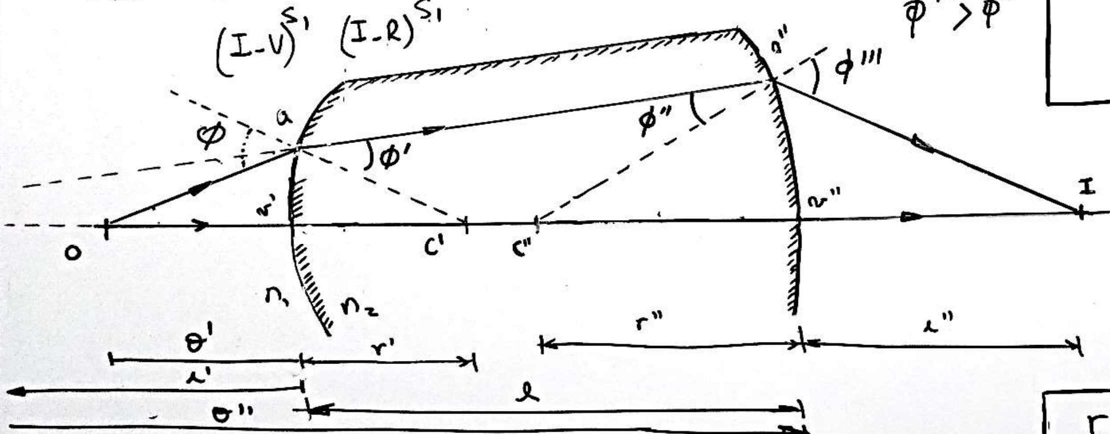
$$-\frac{(1-2)}{10} \approx \frac{2}{15} + \frac{1}{i} \approx \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{i} \approx \frac{1}{10} - \frac{2}{15} \Rightarrow \boxed{i \approx -30 \text{ cm}}$$

Lentes delgadas

En la mayoría de los casos existen dos superficies refractoras, este es el caso, por ejemplo de los anteojos donde la luz atraviesa aire-vidrio-aire. En los microscopios, telescopios, cámaras fotográficas ets, en general existen más de dos superficies.

Veamos el caso de una "lente gruesa"



Vamos a analizar la primera superficie.
La formación de la imagen se produce del lado virtual de la superficie (para la imagen). Utilizamos la ecuación que obtuvimos para superficies refractantes esféricas

$$\frac{n_1}{\theta'} + \frac{n_2}{i'} = \frac{n_2 - n_1}{r'}$$

En esta superficie
$n_1 = 1$; $n_2 = n$ además $i' < 0$, $r' > 0$, $\theta > 0$

Como $i' < 0$ vamos a usar $i' = -|i'|$, luego la ecuación anterior nos queda,

$$\frac{1}{\theta'} - \frac{n}{|i'|} = \frac{n-1}{r'}$$

Veamos que sucede con la Segunda superficie
En este caso

$$\theta'' = |i'| + l$$

Si aplicamos la ecuación para una superficie refractante, en el caso de la 2do superficie, tenemos que ahora $n_1 = n$ y $n_2 = 1$ ∴

$$\frac{n}{\theta''} + \frac{1}{i''} = \frac{1-n}{r''} \qquad i'' > 0,\ \theta'' > 0,\ r'' < 0$$

reemplazamos θ'', nos queda,

$$\frac{n}{|i'| + l} + \frac{1}{i''} = \frac{1-n}{r''}$$

Despejamos $|i'|$ de la ecuación para la 1ra superficie

$$\frac{1}{n\theta'} - \frac{(n-1)}{nr'} = \frac{1}{|i'|} \Rightarrow |i'| = -\frac{nr'\theta'}{(n-1)\theta' - r'}$$

y reemplazamos en la ecuación p/ la 2da superficie.

$$\frac{n}{\frac{-nr'\theta'}{(n-1)\theta'-r'} \cancel{+\ell}} + \frac{1}{i''} = \frac{1-n}{r''}$$

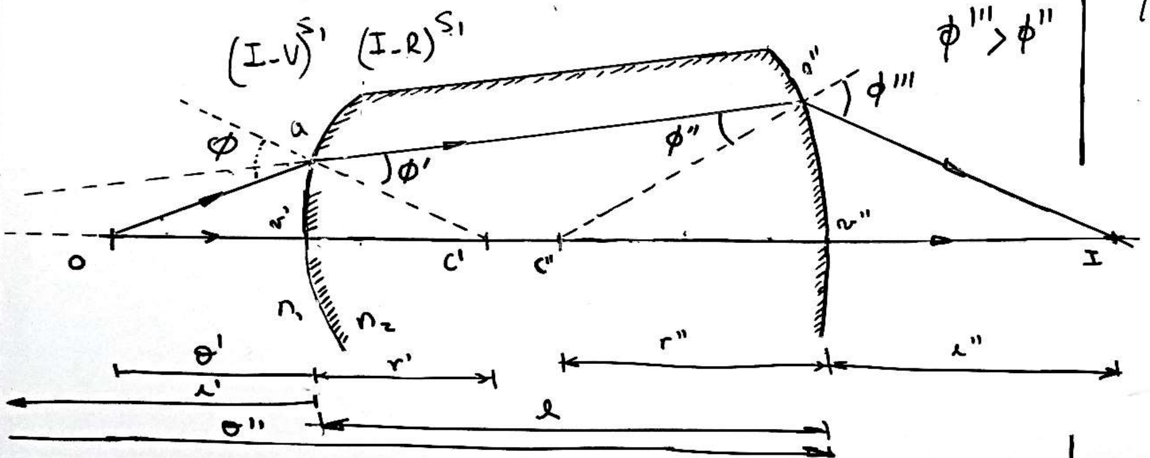
Ahora consideramos que ℓ<<, por lo que aproximamos el denominador del 1er término, y el resultado corresponde a "lentes delgadas"

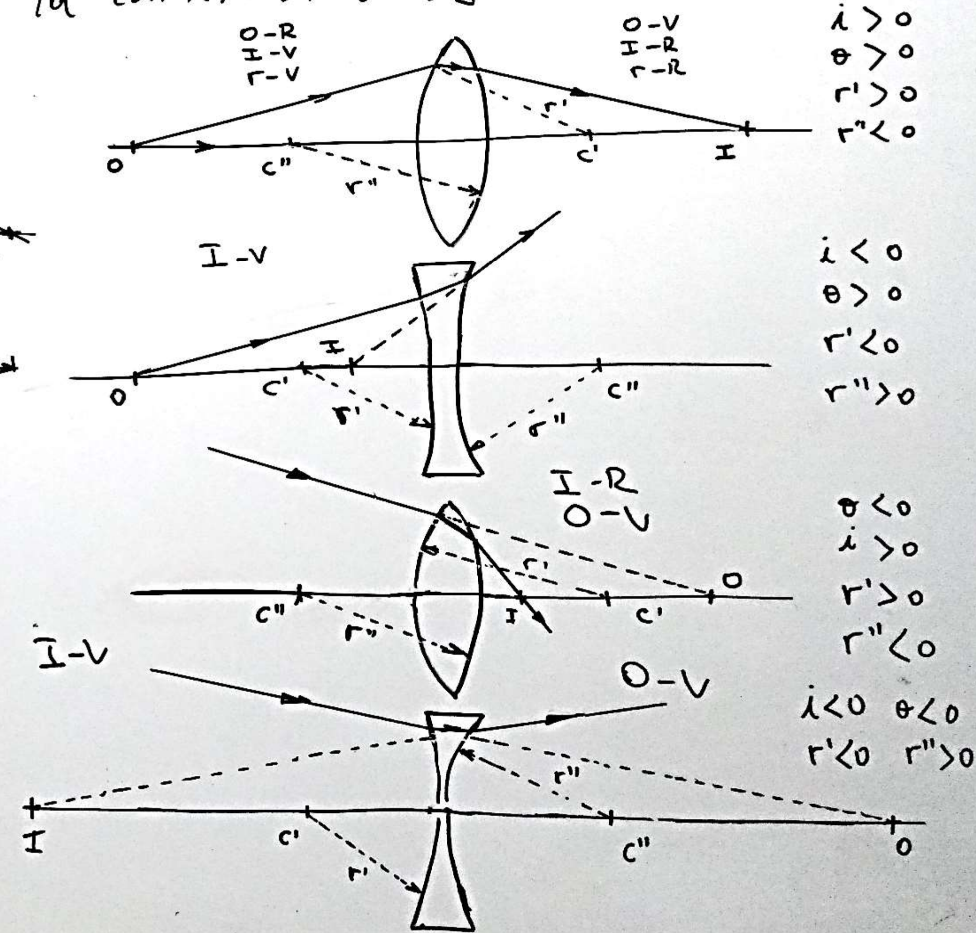
Si consideramos la lente como un todo y llamamos $\theta' = \theta$; $i'' = i$ tenemos

Ecuación p/lentes delgadas

$$\boxed{(n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right) = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{i}}$$

En los gráficos a continuación se discute la convención de signos.



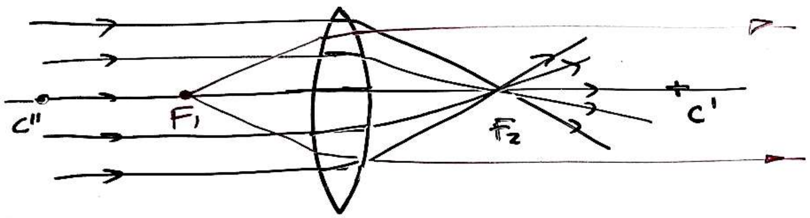


$$\Rightarrow \quad -\frac{(n-1)\theta' - r'}{r'\theta'} + \frac{1}{i''} = \frac{1-n}{r''}$$

$$\therefore \quad \frac{(n-1)}{r'} - \frac{1}{\theta'} - \frac{1}{i''} = \frac{n-1}{r''}$$

$$(n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right) = \frac{1}{\theta'} + \frac{1}{i''}$$

Supongamos ahora objetos distantes cuya luz incide sobre una lente delgada. Podemos considerar que estos rayos de luz provienen del ∞.



El punto donde se focaliza la imagen se denomina "segundo punto focal de la lente", F_2.

El primer punto focal de la lente corresponde a la posición del objeto de manera tal que los haces refractados forman la imagen en el ∞.

Luego si $\theta \to \infty$ $\quad i = f_2$

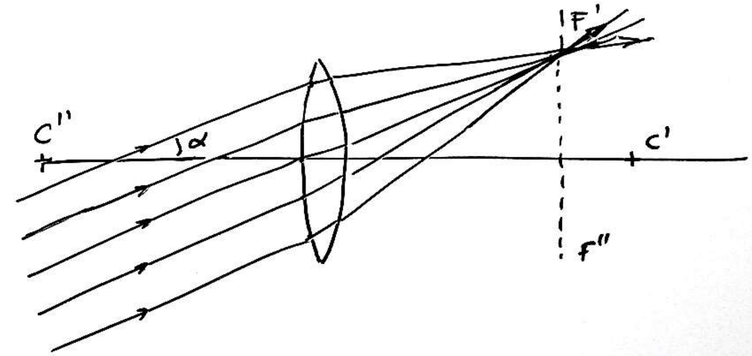
$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{f_2} = (n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)}$$

Ecuación del fabricante de lentes.

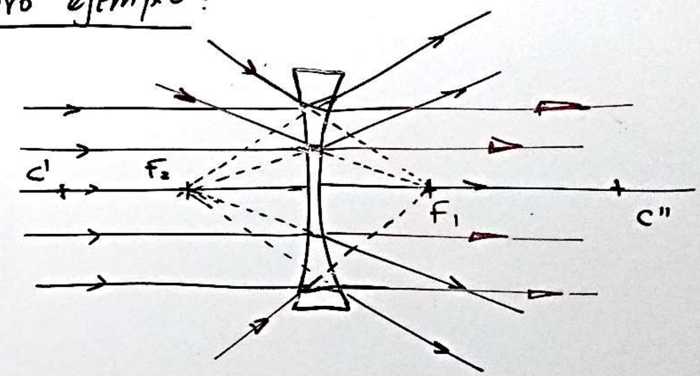
por otro lado como $\quad \frac{1}{\theta} + \frac{1}{i} = (n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\theta} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f_2}}$$

Si el haz de rayos que viene del ∞ forma un ángulo con el eje de la lente, la imagen se forma en el plano F'_F'' (ver figura)



otro ejemplo:

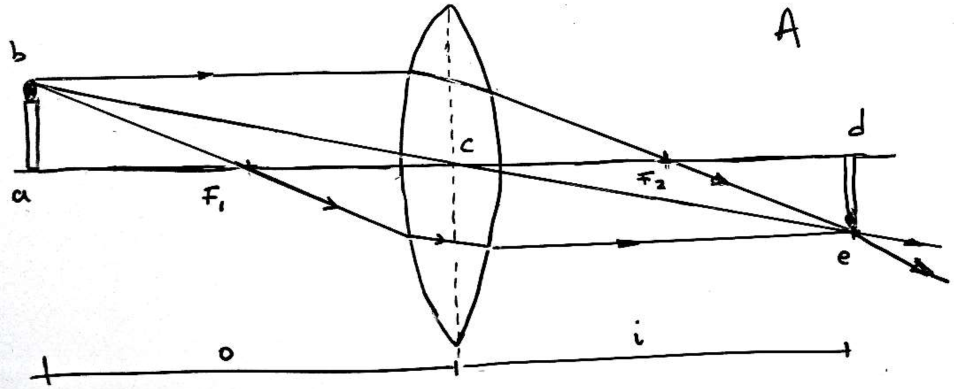


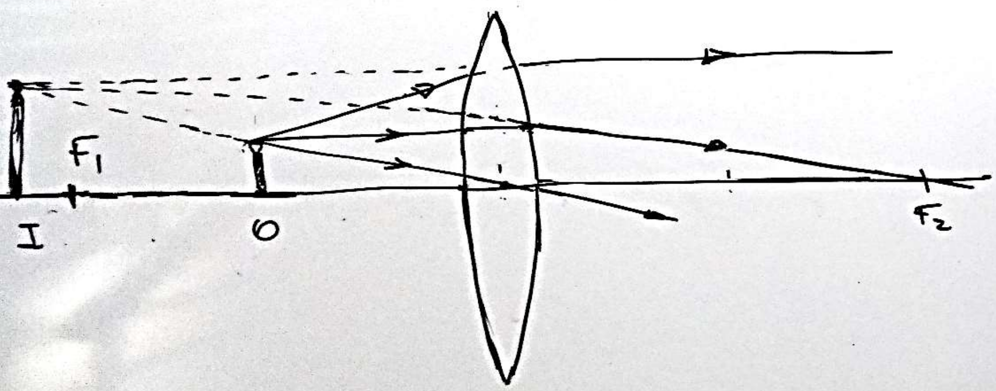
Objetos extendidos

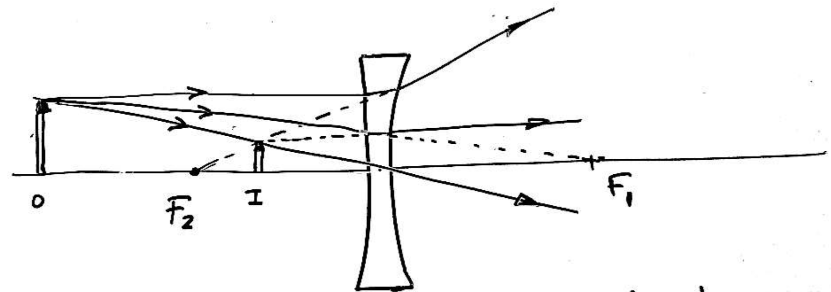
Para determinar la imagen de un objeto extendido pueden utilizarse tres haces representativos.

Veamos el caso de la figura.

A







Si miramos la figura A, los triángulos abc y dec son semejantes:

$$\frac{ed}{ab} = \frac{cd}{ac} = \frac{i}{o}$$

Esto es lo que definimos como magnificación lateral,

$$m = -\frac{i}{o}$$

donde el signo menos se incorpora para que en el caso de una imagen invertida m sea < 0.