Ecuaciones de Maxwell

A lo largo de la materia vimos que las ecuaciones que gobiernan la electrostática y la magnetostática son,

Ley de Gauss	(1)	$\nabla . \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oint_S \bar{E} . d\bar{s} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$
No hay monopolos magnéticos	(2)	$\nabla . \bar{B} = 0$	$\oint_S \bar{B} . d\bar{s} = 0$
$\bar{E}$ conservativo	(3)	$\nabla \times \bar{E} = 0$	$\oint_\Gamma \bar{E} . d\bar{l} = 0$
Ley de Ampere	(4)	$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{j}$	$\oint_\Gamma \bar{B} . d\bar{l} = \mu_0 I$

La incorporación de campos magnéticos variables en el tiempo modifica la ecuación del rotor del campo eléctrico (3)

$$(3') \quad \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad \mathcal{E} = \oint_\Gamma \bar{E} . d\bar{l} = -\frac{d\phi_{\bar{B}}}{dt}$$

Sin embargo, es fácil ver que $\exists$ una inconsistencia en estas ecuaciones. Sabemos que

$$\nabla . \nabla \times \bar{f} = 0$$

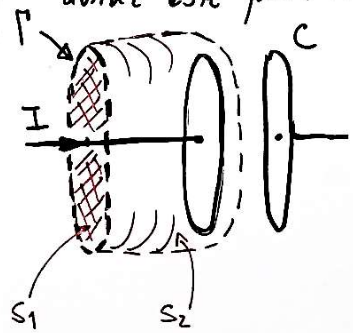
por lo tanto para el campo eléctrico

$$\nabla . (\nabla \times \bar{E}) = \nabla . \left(-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\nabla . \bar{B}}_{=0} = 0$$

Vemos que se cumple la condición anterior. Si aplicamos la divergencia al campo magnético $\bar{B}$ resulta que,

$$\nabla . (\nabla \times \bar{B}) = \nabla . (\mu_0 \bar{j}) = \mu_0 \nabla . \bar{j}$$

la $\nabla . \bar{j} = 0$ mientras las corrientes son estacionarias, el problema surge cuando tenemos corrientes no estacionarias. Veamos un ejemplo donde este problema se manifiesta claramente.



Supongamos un capacitor C que está siendo cargado. Usando la ley de Ampere podemos aproximar que

$$\oint_\Gamma \bar{B} . d\bar{l} = \mu_0 I$$

donde Γ define un circuito de integración, que a su vez define una superficie a través de la cual es necesario ver que corrientes la atraviesan.

Si elegimos S_1 vemos que la superficie es atravesada por I. Sin embargo si elegimos S_2 encontramos que la no es atravesada por ninguna corriente. Es decir $\exists$ una clara ambigüedad en como elegir la superficie definida por el loop Γ.

Corrección de Maxwell a la Ley de Ampere

Maxwell percibió que esta contradicción podía ser removida con el agregado de un término extra en la ecuación de la ley de Ampere de manera que

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

* Observar que cuando $\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0$, recuperamos la ecuación $\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}$ de la magnetostática

* Observar que el término extra predice que así como el campo $\bar{B}$ variable en el tiempo genera un $\bar{E}$, el campo $\bar{E}$ variable en el tiempo genera un $\bar{B}$

* El término extra propuesto teoricamente ha sido verificado años más tarde por Hertz y los experimentos relacionados con ondas electromagnéticas

* La ecuación de Ampere corregida en su forma integral resulta,

$$\iint_S \nabla \times \bar{B} \cdot d\bar{s} = \mu_0 \iint_S \bar{J} \cdot d\bar{s} + \mu_0 \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \cdot d\bar{s}$$

aplicando el teorema de Stokes,

$$\oint_\Gamma \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \bar{E} \cdot d\bar{s}$$

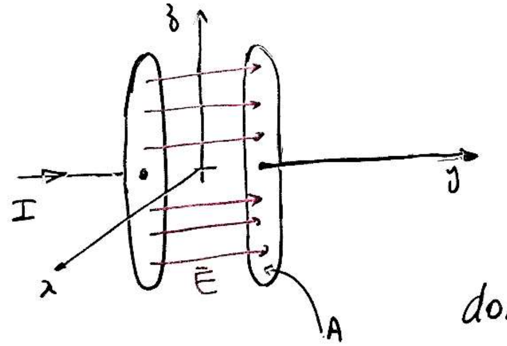
$$\boxed{\oint_\Gamma \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}}$$

de manera que el término extra por analogía resulta,

$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ corriente de desplazamiento

$\bar{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ densidad de corriente de desplazamiento

A continuación veamos como se resuelve la paradoja del capacitor.



$$\bar{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{e}_y$$

$$\bar{E} = \frac{q}{A\varepsilon_0}\,\hat{e}_y$$

donde q es la carga eléctrica en una de las placas del capacitor, pero que varía con el tiempo, por lo tanto,

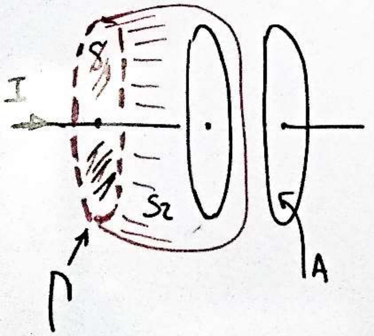
$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{1}{A\varepsilon_0}\frac{\partial q}{\partial t}\,\hat{e}_y = \frac{I}{A\varepsilon_0}\,\hat{e}_y$$

en la ecuación anterior suponemos $I = cte$

Veamos la aplicación de la ecuación de Ampere-Maxwell,

$$\oint_\Gamma \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I_{enc} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$= \mu_0 I_{enc} + \mu_0\varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\cdot d\bar{s}$$



Si elegimos $S_1 \Rightarrow$

$I_{enc} = I$ mientras que

$$\iint_{S_1} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\cdot d\bar{s} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \oint_\Gamma \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I$$

Si elegimos S_2 resulta que

$$I_{enc} = 0$$

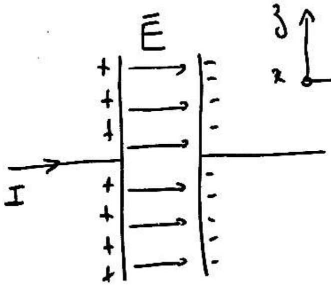
$$\mu_0\varepsilon_0 \iint_{S_2} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\cdot d\bar{s} = \mu_0\varepsilon_0 \iint_{S_2} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\cdot d\bar{s}_2 = \mu_0\varepsilon_0 \iint_{S_2} \frac{I}{A\varepsilon_0}\hat{e}_y\cdot d\bar{s}$$

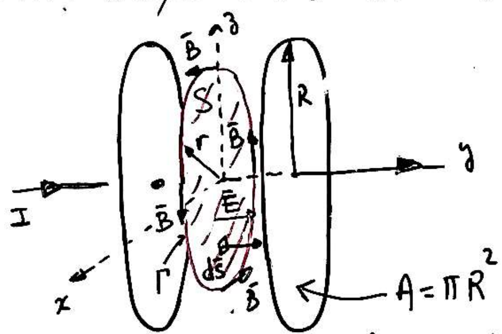
$$= \mu_0 \cancel{\varepsilon_0} \frac{I}{\cancel{A\varepsilon_0}} \cancel{A} = \mu_0 I$$

Es decir no importa la superficie que elijamos, S_1 o S_2, el resultado es el mismo.

$$\oint_\Gamma \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I.$$

Ejemplo: Consideremos el capacitor de placas paralelas de radio R. Queremos calcular el campo $\bar{B}$ inducido entre las placas en función del radio r.





para calcular $\bar{B}$ dentro del capacitor usamos la ecuación

$$\oint_\Gamma \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{\bar{E}}}{dt}$$

si $r<R$

La superficie de radio r no es atravesada por ninguna corriente, es decir que

$$I_{enc}=0$$

$$\Rightarrow \oint_\Gamma \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{\bar{E}}}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint_S \bar{E}\cdot d\bar{s}$$

$$\Rightarrow \oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\cdot d\bar{s}$$

en nuestro caso

$$d\bar{s} = ds\,\hat{e}_y = \overbrace{r'\,dr'\,d\phi}^{ds}\,\hat{e}_y$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{I}{A\varepsilon_0}\hat{e}_y$$

si planteamos el término de Maxwell,

$$\mu_0 \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\cdot d\bar{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{I}{\varepsilon_0 A}\, r'\,d\phi\, dr'$$

$$= \mu_0 \cancel{\varepsilon_0} \frac{I}{\cancel{\varepsilon_0} \underbrace{A}_{\pi R^2}} \cancel{2}\pi \frac{r^2}{\cancel{2}} = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}$$

por otro lado tenemos que

$$\bar{B} = B\,\hat{e}_\phi$$

$$d\bar{l} = r\,d\phi\,\hat{e}_\phi$$

$$\therefore \oint_\Gamma \bar{B}\cdot d\bar{l} = 2\pi r B = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{R^2}$$

o en forma vectorial,

$$\boxed{\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{R^2}\,\hat{e}_\phi}$$

Si $r > R$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \cdot d\bar{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{I}{\varepsilon_0 A} r' \, d\phi \, dr'$$

Al igual que en el caso anterior,

$$\oint_\Gamma \bar{B} \cdot d\bar{l} = B \, 2\pi r = \mu_0 \cancel{\varepsilon_0} \frac{I \cancel{2\pi} \cancel{R^2}}{\cancel{\varepsilon_0} \cancel{\pi} \cancel{R^2} \cancel{2}}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad \underline{r > R}$$

y en forma vectorial,

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\phi$$

Supongamos que $R = 5$ cm, la distancia entre placas $d = 1$ mm y la variación de $\bar{E}$ con el tiempo

$$\frac{\partial |\bar{E}|}{\partial t} = \frac{1}{d} \frac{\partial V}{\partial t} = \text{cte}.$$

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_{\bar{E}}}{\partial t} = \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \cdot d\bar{s} = \varepsilon_0 \frac{1}{d} \frac{\partial V}{\partial t} \pi R^2$$

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\cancel{2}\cancel{\pi}} \frac{1}{d} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\cancel{\pi} R^{\cancel{2}}}{\cancel{R}} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 R}{2d} \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$B = 4\pi \, 10^{-7} \, 10^4 \, \frac{G \cancel{m}}{\cancel{A}} \, 8.9 \, 10^{-12} \frac{C^2}{N m^2} \, \frac{5 \, 10^{-2} \cancel{m}}{2 \, 10^{-3} \cancel{m}} \, \frac{100 \, V}{\cancel{s}}$$

$$\boxed{B \approx 2.8 \; 10^{-10} \; G}$$

Aquí puede verse que los campos inducidos son muy pequeños y difíciles de medir.

<u>Resumiendo</u>.

Las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \bar{E} = \rho / \varepsilon_0 \qquad \oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad \text{Ley de Gauss}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \qquad \oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad \varepsilon = \oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad \text{Ley de Faraday}$$

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \qquad \oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_{\bar{E}}}{dt}$$

Ley de Ampere Maxwell

Junto con la ecuación de Lorentz

$$\bar{F} = q\bar{E} + q\bar{v} \times \bar{B}$$

describen por completo la teoría electrodinámica

Leyes de conservación

Ecuación de continuidad (conservación de la carga)

Esta ecuación ya la vimos anteriormente,

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Si recordamos que $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{F}) = 0$ y usamos la ecuación de Ampere-Maxwell para calcular $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{B})$ tenemos,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{B}) = \cancel{\mu_0} \nabla \cdot \vec{J} + \cancel{\mu_0} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{E} = 0$$

Como $\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\cancel{\varepsilon_0}}{\cancel{\varepsilon_0}} \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}}$$

Teorema de Poynting (conservación de la energía)

Supongamos que tenemos una configuración de cargas y corrientes que generan un $\bar{E}$ y un $\bar{B}$.

Si tenemos un dq en una región con los campos $\bar{E}$ y $\bar{B}$, los mismos realizaran un trabajo,

$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{l} = dq(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) \cdot \frac{\bar{v}\,dt}{d\bar{l}}$$

$$dW = dq\,[\bar{E} \cdot \bar{v} + \underbrace{\bar{v} \times \bar{B} \cdot \bar{v}}_{=0}]\,dt$$

como $dq = \rho_v \, dvol$

$$dW = \underbrace{\rho_v \, \bar{E} \cdot \bar{v}}_{=\bar{J}} \, dt \, dvol$$

si consideramos que $\bar{J} = \rho_v \bar{v}$

$$dW = \bar{E} \cdot \bar{J} \, dt \, dvol$$

Si tenemos un volumen, en lugar de un $dvol$,

$$dW = \iiint_{Vol} \bar{E} \cdot \bar{J} \, dvol \, dt$$

es decir que $\frac{dW}{dt} = \iiint_{Vol} \bar{E} \cdot \vec{J} \, dvol$

Es decir que $\bar{E} \cdot \vec{J}$ es el trabajo realizado por unidad de tiempo en un volumen dado por el campo electromagnético sobre la carga eléctrica recordemos que si

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \bar{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

reemplazando en el producto de $\bar{E} \cdot \vec{J}$ tenemos que

$$\bar{E} \cdot \bar{J} = \frac{1}{\mu_0} \bar{E} \cdot \nabla \times \bar{B} - \varepsilon_0 \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

usando la regla del producto entre vectores

$$\nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{C}) = \bar{C} \cdot (\nabla \times \bar{A}) - \bar{A} \cdot (\nabla \times \bar{C})$$

$$\bar{E} \cdot (\nabla \times \bar{B})$$

si $\bar{A} = \bar{E}$ y $\bar{C} = \bar{B}$ tenemos,

$$\bar{E} \cdot \bar{J} = \frac{1}{\mu_0} \left[\bar{B} \cdot \nabla \times \bar{E} - \nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{B}) \right] - \varepsilon_0 \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

como $\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

$$\bar{E} \cdot \bar{J} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{B}) - \frac{1}{\mu_0} \bar{B} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

$$\bar{E} \cdot \bar{J} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{B}) - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial \bar{B}^2}{\partial t} - \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial \bar{E}^2}{\partial t}$$

si realizamos la integral de volumen,

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_{Vol} \bar{E} \cdot \bar{J} \, d\mathrm{vol} = -\frac{d}{dt} \iiint_{Vol} \left(\frac{1}{2\mu_0} \bar{B}^2 + \frac{\varepsilon_0 \bar{E}^2}{2} \right) d\mathrm{vol} - \frac{1}{\mu_0} \iiint_{Vol} \nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{B}) \, d\mathrm{vol}$$

aquí usamos el Teorema de la divergencia de manera que,

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_{Vol} \left(\frac{\bar{B}^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0}{2} \bar{E}^2 \right) d\mathrm{vol} - \frac{1}{\mu_0} \oiint_{Sup} (\bar{E} \times \bar{B}) \cdot d\bar{S}_{Sup}}$$

donde Sup es la superficie del volumen Vol. Esta ecuación se denomina Teorema de Poynting.

- La primera integral es la energía almacenada en el campo electromagnético y ocupa el volumen Vol.
- El segundo término representa la velocidad a la cual la energía es transportada a través de la superficie fuera del volumen Vol. por el campo electromagnético.

El teorema de Poynting nos dice que,

"El trabajo hecho sobre las cargas por una fuerza electromagnética es igual a la disminución en la energía almacenada en el campo, menos la energía que fluye a través de la superficie Sup fuera del volumen Vol."

Al producto vectorial $\bar{E} \times \bar{B}$ lo denominamos vector de Poynting

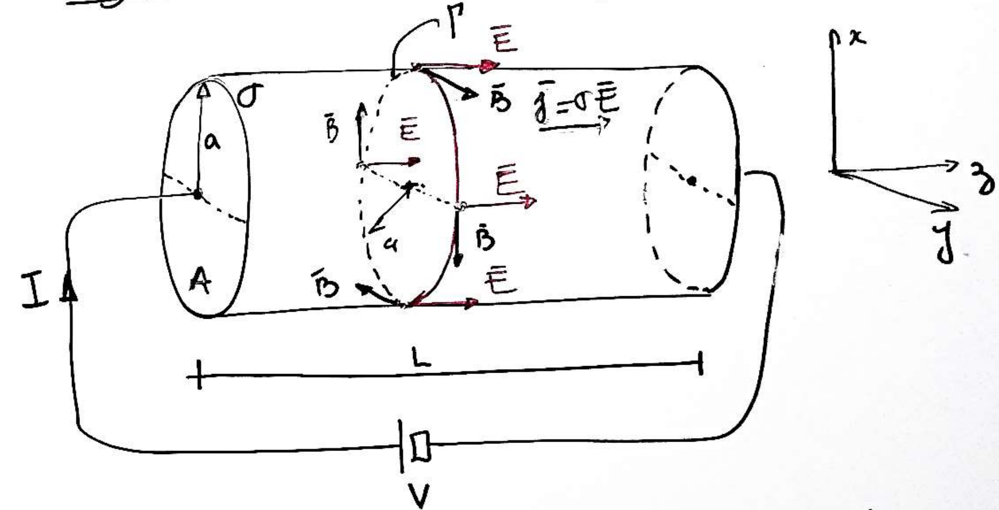
$$\boxed{\bar{S} = \frac{1}{\mu_0} \bar{E} \times \bar{B}}$$

representa flujo de energía por unidad de área y unidad de tiempo, es decir que

$$\Phi_{\bar{S}} = \oiint_{Sup} \bar{S} \cdot d\bar{S}_{up}$$

es el flujo de energía por unidad de tiempo a través del área Sup.

Ejemplo. Vector de Poynting en un cable.



Dentro del material tenemos una corriente y por lo tanto un campo eléctrico, de acuerdo a nuestro sistema de referencia,

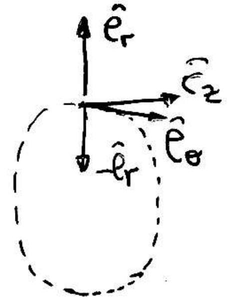
$$\bar{E} = \frac{V}{L} \hat{e}_z$$

Por otro lado utilizando la ley de Ampere en el circuito de integración Γ vamos a encontrar que

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{e}_\theta$$

Luego podemos calcular al vector de Poynting $\bar{S}$.

$$\bar{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\bar{E}\times\bar{B} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{V}{L}\,\hat{e}_z\right)\times\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\,\hat{e}_\theta\right)$$

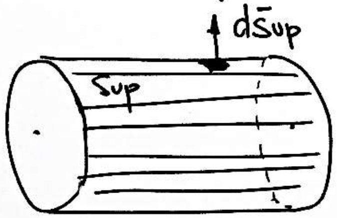


$$\hat{e}_z \times \hat{e}_\theta = -\hat{e}_r$$

$$\bar{S} = -\frac{1}{\cancel{\mu_0}}\,\cancel{\mu_0}\,\frac{VI}{2\pi a L}\,\hat{e}_r$$

$$\bar{S} = -\frac{VI}{2\pi a}\,\frac{1}{L}\,\hat{e}_r$$

Si calculamos el flujo del vector de Poynting. en la superficie lateral,



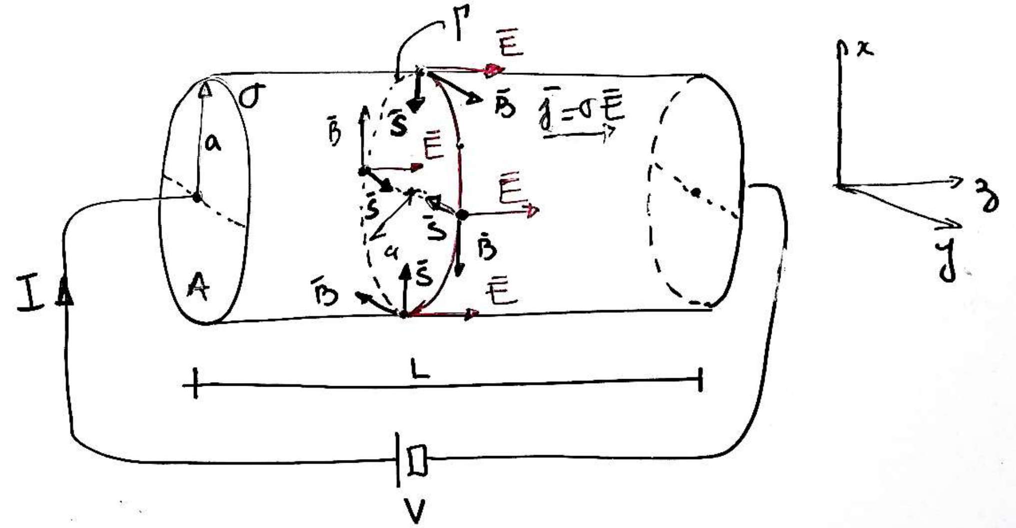
$$\phi_{\bar{S}} = \iint_{Sup} \bar{S}\cdot d\bar{S}up =$$

$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r = 1$

$$= \int_0^L\int_0^{2\pi}\left(-\frac{VI\,\hat{e}_r}{2\pi a L}\right)\cdot\left(a.\,d\theta\, dz\,\hat{e}_r\right) =$$

$dSup = a\,d\theta\,dz$

$$= -\frac{VI a}{2\pi a L}\int_0^L\int_0^{2\pi} d\theta\, dz = \cancel{-\frac{VIa2\pi L}{2\pi a L}}$$



$$\boxed{\phi_{\bar{S}} = -VI}$$

Este resulta nos indica que el flujo de energía por unidad de tiempo a través de la superficie es $-V.I$ es decir la energía esta entrando.

Ademas este valor

$$\phi_S = -VI = -I^2R$$

es la energía disipada por efecto Joule por la resistencia R.