Materiales conductores eléctricos

A partir del comportamiento eléctrico de los materiales vamos a hablar de dos tipos de materiales:

1- Materiales aislantes (vidrio, goma, seda, madera, etc) donde la carga eléctrica (básicamente los electrones) se encuentran asociados a un átomo en particular y no pueden desplazarse en el material. Si bien puedo extraer los electrones del átomo, estos no pueden moverse en el material.

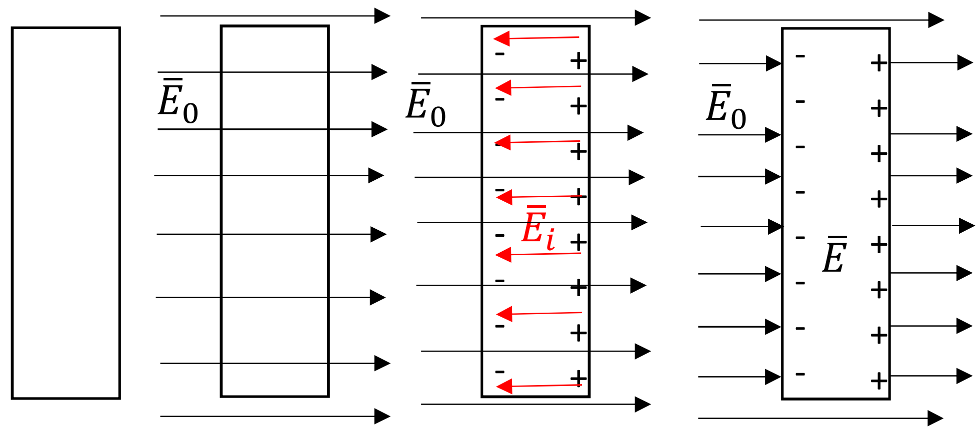
2- **Materiales conductores eléctricos** (metales como Al, Cu, Au, Fe, etc) : los electrones no están asociados a ningún átomo y pueden desplazarse libremente por el material.

A continuación vamos a discutir las propiedades eléctricas de estos materiales

Propiedad 1: El campo eléctrico $\bar{E}$ es nulo en el interior de un conductor eléctrico, es decir,

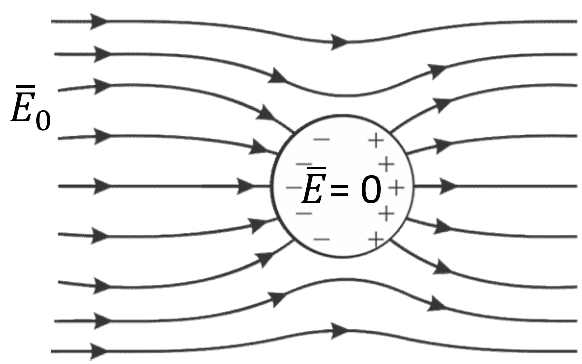
$$\bar{E} = 0$$

Veamos una geometría sencilla,



Una vez que se prende el campo eléctrico $\bar{E}_0$, se produce el movimiento de las cargas eléctricas en el interior del conductor eléctrico, de manera que se "induce" un campo eléctrico $\bar{E}_i$ que se opone a $\bar{E}_0$ de manera que en el interior $\bar{E}$ = 0, es decir,

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}_i = 0$$

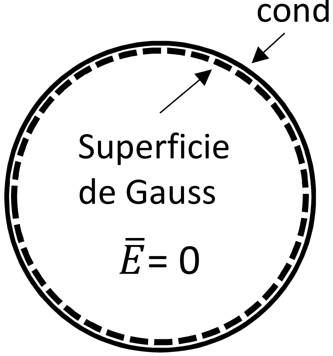


Si tenemos una esfera conductora sumergida en un campo eléctrico, Recordemos que,

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{V_\infty} E^2 dv$$

Por lo tanto, en un conductor si las cargas tienen libertad de movimiento se van a acomodar de manera de minimizar la energía, lo que consiguen haciendo $\bar{E}$ = 0 en el interior del conductor

Propiedad 2: Como el campo eléctrico es nulo en el interior del conductor, si aplicamos la ley de Gauss en esta región, resulta,



$$\oiint_{Sup} \bar{E} \cdot \overline{dS} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = 0$$

Es decir,

$$q_{enc} = 0$$

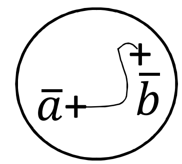
No hay carga eléctrica en el interior del conductor eléctrico,

Otra consecuencia de este resultado es,

$$\nabla . \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Propiedad 3: Como consecuencia del resultado anterior resulta que cualquier exceso de carga en un conductor eléctrico se encuentra en la superficie.

Propiedad 4: Un material conductor eléctrico es una región equipotencial.



$$V(\bar{a}) - V(\bar{b}) = -\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \bar{E} . \bar{dl}$$

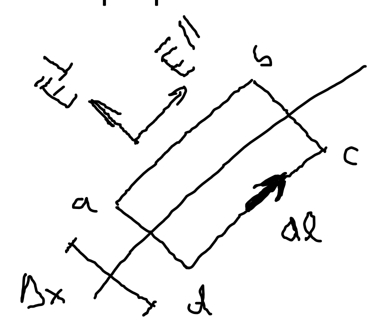
Si $\bar{E}$ = 0 => V($\bar{b}$) = V($\bar{a}$)

Esto también es válido en la superficie del conductor eléctrico.
La componente tangencial a la superficie del campo eléctrico es nula, de otra forma existirían corrientes superficiales.
La superficie del conductor es una superficie equipotencial, por lo tanto, como,

$$\bar{E} = -\nabla V$$

En la superficie el campo eléctrico es perpendicular.

$$\oint \bar{E} . \bar{dl} = 0$$



$$\oint \bar{E} . \bar{dl} = \int \bar{E}^{\perp} . \bar{dl}_{ba} + \int \bar{E}^{\parallel} . \bar{dl}_{ba} + \int \bar{E}^{\perp} . \bar{dl}_{ad} +$$

$$+ \int \bar{E}^{\parallel} . \bar{dl}_{ad} + \int \bar{E}^{\perp} . \bar{dl}_{cb} +$$

$$+ \int \bar{E}^{\parallel} . \bar{dl}_{cb} = 0$$

Del lado del segmento dc $\bar{E}$ = 0 y además $\Delta l_{ad} \rightarrow 0$ al igual que $\Delta l_{cb} \rightarrow 0$, por lo tanto,

$$\oint \bar{E}.\bar{dl} = \int \bar{E}^{\perp}.\bar{dl}_{ba} + \int \bar{E}^{||}.\bar{dl}_{ba} = 0$$

además,

$$\bar{E}^{\perp}.\bar{dl}_{ba} = 0$$

$$\bar{E}^{||}.\bar{dl}_{ba} = -|\bar{E}^{||}|\,\Delta l$$

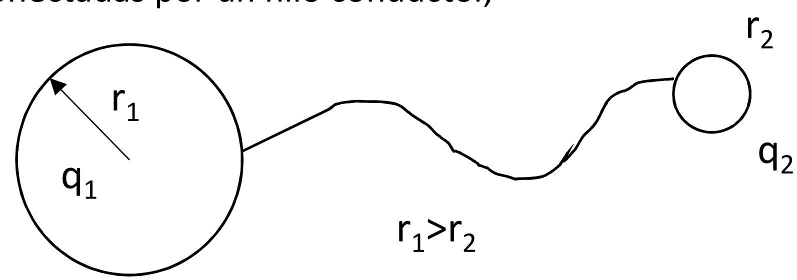
$$\oint \bar{E}.\bar{dl} = \int \bar{E}^{||}.\bar{dl}_{ba} = -|\bar{E}^{||}|\,\Delta l \;= 0$$

Luego, en la superficie del conductor eléctrico,

$$|\bar{E}^{||}| = 0$$

Influencia del radio de curvatura en el campo eléctrico

Supongamos dos esferas conductoras con cargas eléctricas q_1 y q_2, conectadas por un hilo conductor,



El total de cargas eléctricas se distribuyen de manera de lograr que $\bar{E}$ = 0 en el conductor, y el potencial eléctrico se iguale ,

$$V_1 = V_2$$

Para el caso de las esferas conductoras, el potencial eléctrico sobre la superficie es un cálculo equivalente al caso del casquete esférico con carga Q que vimos anteriormente, es decir,

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{r_1}\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_1^2} = \frac{q_2}{r_2}\frac{4\pi r_2^2}{4\pi r_2^2}$$

$$\sigma_1 r_1 = \sigma_2 r_2$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

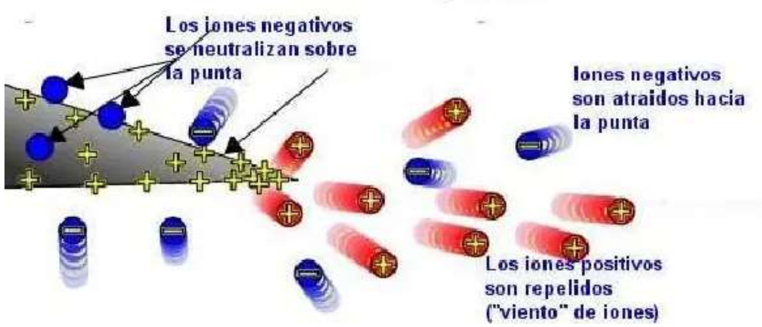
Como $r_1 > r_2 \Rightarrow \sigma_2 > \sigma_1$

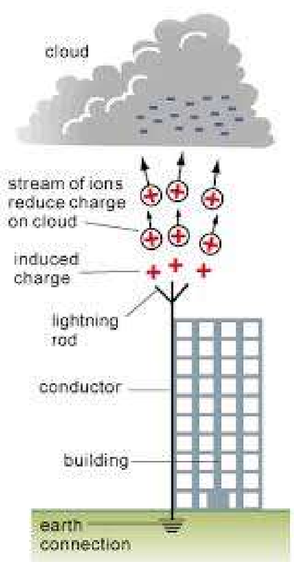
Por otro lado, el campo eléctrico sobre la superficie resulta,

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \qquad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

Como $\sigma_2 > \sigma_1$, este resultado nos indica que aquellas superficies con menor radio de curvatura exhiben un campo eléctrico más intenso

Ejemplo del pararrayos



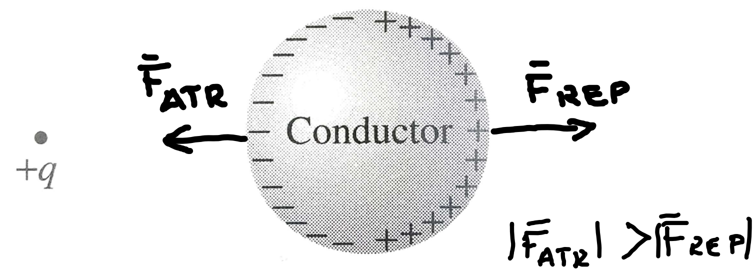


Los iones positivos son atraídos por la carga negativa de la nube, reduciendo la carga de la nube y la diferencia de potencial eléctrico nube-tierra previniendo la formación del rayo

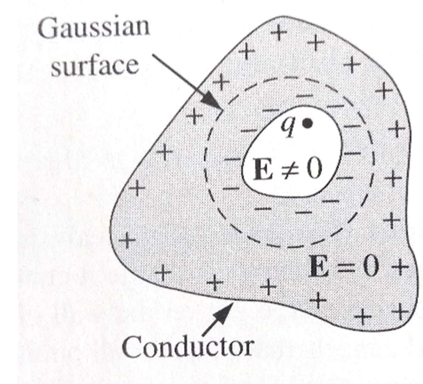
Por otro lado, conducen el rayo por un camino de menor resistencia formado por el cable conductor que está conectado al cabezal y a la tierra, lo que facilita que el rayo tome este camino hacia la tierra.

Carga inducida en un conductor eléctrico

Supongamos ahora que tenemos una esfera conductora eléctrica y acercamos una carga eléctrica, lo primero que se observa es que la carga y la esfera se atraen,



Otro ejemplo es el caso de un conductor con una cavidad, que tiene una carga q en su interior. Dentro de la cavidad $\bar{E} \neq 0$, pero dentro del conductor $\bar{E} = 0$. Usando la ley de Gauss, se demuestra que en la superficie de la cavidad se induce carga $q_{int} = -q$, mientras que en la superficie externa se induce $q_{ext} = q$.



Ecuaciones de Poisson y de Laplace

Como vimos en clases anteriores, el resultado en electrostática de que,

$$\nabla \times \bar{E} = 0$$

nos condujo a la definición del potencial eléctrico

$$V(\bar{b}) - V(\bar{a}) = -\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

que nos condujo a que,

$$\bar{E} = -\nabla V \qquad (1)$$

Por otro lado también obtuvimos a partir de la ley de Gauss que

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Si reemplazamos la ecuación (1) en la forma diferencial de la ley de Gauss,

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla \cdot (\nabla V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

donde $\nabla \cdot \nabla \longrightarrow \nabla^2$

∇^2 es el operador laplaciano, también se utiliza el símbolo Δ, luego tenemos que,

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ Ecuación de Poisson

Si en la región del espacio que estoy analizando $\rho = 0$, tenemos que,

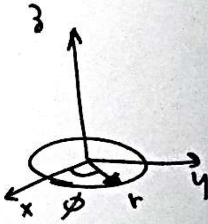
$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$ Ecuación de Laplace

En coordenadas cartesianas la ecuación de Laplace resulta,

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \overbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{e}_z\right)}^{\nabla} \cdot \overbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{e}_z\right)}^{\nabla V} = 0$$

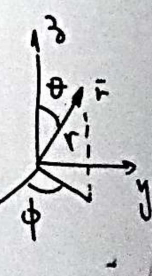
$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

En coordenadas cilíndricas



$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

en coordenadas esféricas,



$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Ecuaciones de Poisson y de Laplace

Ejemplo

Supongamos que $V = V(x)$, es decir es un problema unidimensional.

En una dimension, la ecuación de Laplace resulta

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial V(x)}{\partial x} = cte = m$$

integrando obtenemos que,

$$V(x) = mx + b$$

m y b son ctes que no están determinada.

Para obtener la solucion definitiva necesitamos conocer las "condiciones de contorno" o "de borde".

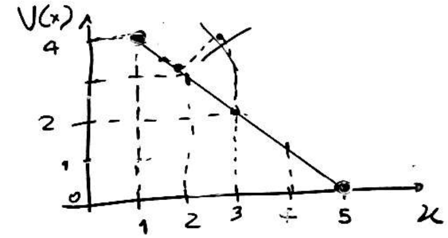
Supongamos que queremos conocer $V(x)$ en el rango $1 \leq x \leq 5$ y sabemos que

$V(1) = 4$ y $V(5) = 0$

Es muy sencillo obtener que

$$V(x) = -x + 5$$

Si graficamos la funcion, resulta:



Si bien este problema es muy sencillo, podemos realizar dos observaciones que se extienden a 2D y 3D

Obs 1: El valor de $V(x)$ es un promedio de los valores del potencial alrededor de x.

Es decir, $V(x) = \frac{1}{2}\left[V(x+a) + V(x-a)\right]$

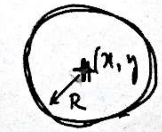
Obs 2: Las soluciones de la ec. de Laplace no toleran máximos y mínimos locales, deben estar en el contorno o borde.

En 2D, la ecuación de Laplace resulta:

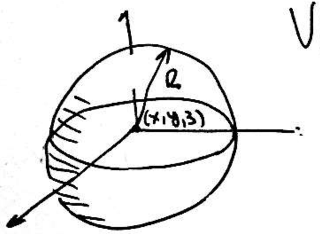
$$\nabla^2 V(x,y) = \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2}$$

Luego haciendo la extensión de la Obs.1 tenemos,

$$V(x,y) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\Gamma} V(x,y)\, dl$$



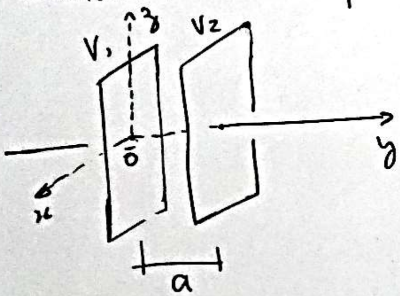
En 3D la propiedad anterior resulta,



$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi R^2} \oiint_S V(x,y,z)\, ds$$

Ejemplo

Supongamos dos placas conductoras a una distancia "a" que están a potenciales V_1 y V_2.



Esto se reduce al problema que vimos anteriormente, suponemos que dentro de las placas el potencial no depende de x y de z.

$$\frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow V(y) = my + b$$

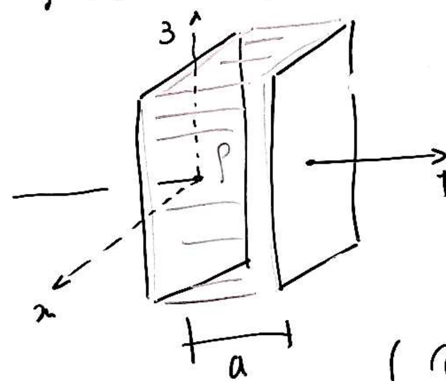
Luego

$$V(0) = b = V_1$$

$$V(a) = ma + V_1 = V_2 \Rightarrow m = \frac{V_2 - V_1}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(y) = \frac{(V_2 - V_1)}{a} y + V_1}$$

Supongamos ahora que tenemos una densidad ρ entre las placas, donde $\rho = \underline{cte}$



$$\frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Nuevamente suponemos que V no depende de x y de z

$$\int \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2} dy = -\int \frac{\rho}{\varepsilon_0} dy$$

$$\frac{\partial V(y)}{\partial y} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} y + C_1 \qquad C_1 : \text{constante}$$

Integramos nuevamente,

$$V(y) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \qquad C_2 : \text{constante}$$

Para resolver el problema necesitamos encontrar C_1 y C_2, para eso usamos las condiciones de contorno

$$V(0) = C_2 = V_1$$

$$V(a) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} a^2 + C_1 a + V_1 = V_2$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{(V_2 - V_1)}{a} + \frac{\rho}{2\varepsilon_0} a$$

Reemplazando en $V(x)$ tenemos,

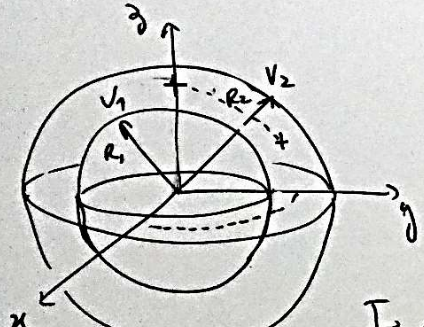
$$\boxed{V(y) = V_1 + \frac{(V_2-V_1)}{a}\, y + \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\, y - \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\, y^2}$$

Para calcular el campo eléctrico usamos

$$\bar{E} = -\nabla V$$

$$\boxed{\bar{E} = \left(-\frac{(V_2-V_1)}{a} - \frac{\rho a}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, y\right) \hat{e}_y}$$

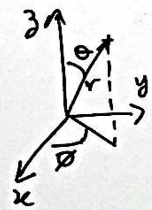
Ejemplo: Dos casquetes esféricos de radios R_1 y R_2 que están a un potencial V_1 y V_2 respectivamente. Queremos calcular el potencial eléctrico entre casquetes



$$R_1 \leq r \leq R_2$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$



En este caso, entre casquetes $\rho = 0 \Rightarrow$ tenemos q' resolver,

el laplaciano en coordenadas esféricas,

$$\nabla^2 V(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Dada la simetría del problema,

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

la ecuación de Laplace se reduce a,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \quad \text{o}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0}$$

Si integramos,

$$r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2}$$

Integramos nuevamente,

$$\boxed{V(r,\theta,\phi) = -\frac{C_1}{r} + C_2}$$

Usamos las condiciones de contorno

$$\begin{cases} V(R_1) = -\dfrac{C_1}{R_1} + C_2 = V_1 \\ V(R_2) = -\dfrac{C_1}{R_2} + C_2 = V_2 \end{cases}$$

resolviendo,

$$C_1 = \frac{(V_1 - V_2)\, R_1 R_2}{(R_1 - R_2)}$$

$$C_2 = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{(R_1 - R_2)}\, R_1$$

Reemplazando

$$\boxed{V(r) = V_2 + \frac{(V_1 - V_2)}{(R_1 - R_2)} R_1 - \frac{(V_1 - V_2) R_1 R_2}{(R_1 - R_2)} \frac{1}{r}}$$

para $R_1 \leq r \leq R_2$

Para calcular el campo eléctrico usamos que,

$$\bar{E} = -\nabla V$$

en coordenadas esféricas

$$\nabla V(r,\theta,\phi) = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{E}(r) = \frac{(V_1 - V_2) R_1 R_2}{(R_1 - R_2)} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r}$$