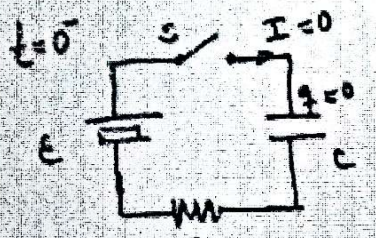
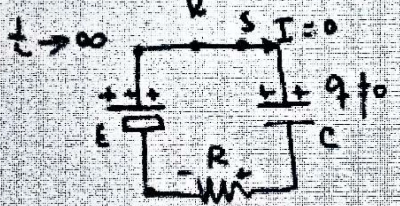
Circuitos RC

En esta clase vamos a ver como se modifica el comportamiento de los circuitos cuando introducimos un capacitor.

Supongamos el siguiente circuito,



A $t = 0$ el interruptor está abierto, luego $I = 0$ y la carga q en el capacitor es nula $q = 0$.



Si conectamos el interruptor para $t \to \infty$

$$I = 0 \quad q \neq 0$$

Entre ambos momentos existe una circulación de carga eléctrica (corriente) que carga las placas del capacitor.

Queremos determinar la corriente eléctrica que se establece en el circuito entre ambos momentos.

a) Vamos a comenzar usando la noción de conservación de la energía.

En el momento que la corriente $I \neq 0$ existe un movimiento de carga eléctrica, según la relación

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Es decir la fem aumenta la energía potencial de un dq (realiza un trabajo dW) según la ecuación

$$dW = \mathcal{E}\, dq$$

mientras que en la resistencia se disipa energía

$$dU_R = \underbrace{R I}_{V_R}\, dq$$

y en el capacitor se acumula energía

$$dU_C = \overbrace{\frac{q}{C}}^{V_C}\, dq$$

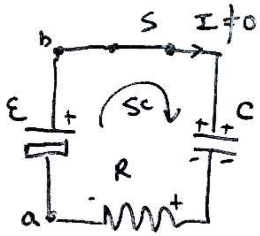
Si planteamos el balance de energía

$$\mathcal{E}\, dq = I R\, dq + \frac{q}{C}\, dq$$

$$\boxed{\mathcal{E} = I R + \frac{q}{C}}$$ mientras cargamos el capacitor

$$\mathcal{E} = \frac{dq}{dt} R + \frac{q}{C}$$

b) Si aplicamos la 2da ley de Kirchoff



$$\varepsilon - \frac{q}{C} - RI = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon = IR + \frac{q}{C}}$$

Si ahora volvemos a la ecuación diferencial

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\varepsilon}{R}$$

la podemos resolver por lo que se denomina el método de separación de variables

$$RC\,\frac{dq}{dt} = \varepsilon C - q$$

reordenando,

$$\frac{dq}{\varepsilon C - q} = \frac{1}{RC}\,dt$$

multiplicamos por (-1)

$$\frac{dq}{q - \varepsilon C} = -\frac{1}{RC}\,dt$$

ahora integramos,

$$\int \frac{dq}{q-\varepsilon C} = -\frac{1}{RC}\int dt \Rightarrow \ln(q - \varepsilon C) = -\frac{1}{RC}t + cte$$

despejando la carga eléctrica q, resulta:

$$q(t) = \varepsilon C + e^{-\frac{t}{RC} + cte} = \varepsilon C + \underset{\substack{\uparrow \\ e^{cte}}}{cte^*}\,\underbrace{e^{-t/RC}}_{=1}$$

Ahora usamos las condiciones de contorno

$$\boxed{q(t=0) = 0}$$

$$\therefore\ q(t=0) = \varepsilon C + cte^* = 0 \Rightarrow cte^* = -\varepsilon C$$

$$\boxed{q(t) = \varepsilon C\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$$

como

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\varepsilon \cancel{C}\left(-\frac{1}{R\cancel{C}}\right)e^{-t/RC}$$

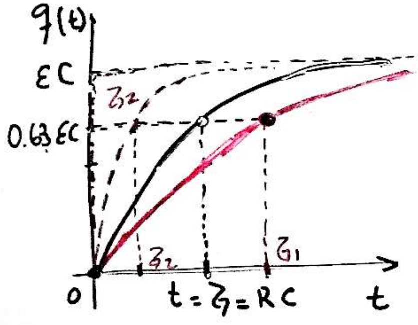
$$\boxed{I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\,e^{-t/RC}}$$

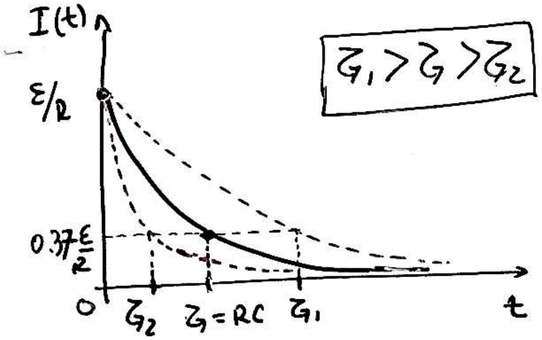
finalmente $\boxed{V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$

$$q(t) = \mathcal{E}C(1 - e^{-t/RC}) \qquad I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\, e^{-t/RC}$$

$$q(0) = 0 \qquad q(t\to\infty) = \mathcal{E}C \qquad I(0) = \mathcal{E}/R$$

$$I(t\to\infty) = 0$$





$$\boxed{\tau_1 > \tau > \tau_2}$$

para $t = RC$ $\qquad q(\tau) = \mathcal{E}C\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0.63\,\underbrace{\mathcal{E}C}_{q_{max}}$

$$I(\tau) = 0.37\,\frac{\mathcal{E}}{R}$$

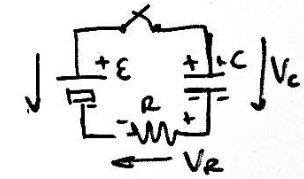
$t = \tau = RC$ es la <u>constante capacitiva</u> del circuito.

<u>Obs</u>: Si $RC = 0 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow$ el capacitor se carga instantaneamente

<u>Obs</u>: Si $\tau_1 > \tau$ la curva tarda mas tiempo en llegar al máximo. Idem si $\tau_2 < \tau$ tarda menos tiempo.

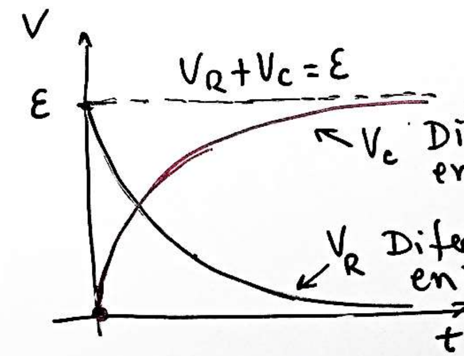
Veamos que sucede con las diferencias de potencial entre los extremos de la fem, de la resistencia y del capacitor.

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$$

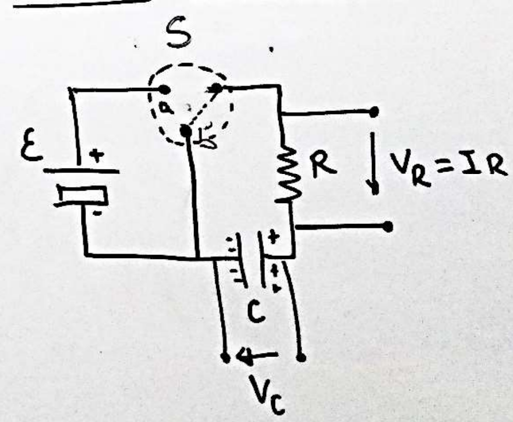


$$V_R(t) = I(t)R = \mathcal{E}\, e^{-t/RC}$$

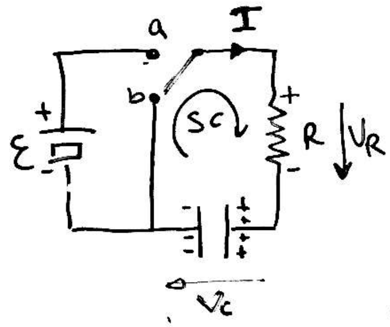
$$V_R(t) + V_C(T) = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) + \mathcal{E}e^{-t/RC} = \mathcal{E}$$



<u>Descarga de un capacitor</u>



El interruptor se encuentra inicialmente en "a". Luego de un tiempo prolongado se coloca en la posición "b".



En esta situación el capacitor actúa suministrando carga al circuito. Es decir los e^- comienzan a moverse de la placa negativa a la positiva

Aplicamos la 2da ley de Kirchof

$$-IR - \frac{q}{C} = 0$$

por otro lado
$$I = \frac{dq}{dt}$$

resulta que
$$-R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

utilizamos el método de separación de variables

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\,dt \Rightarrow q(t) = cte\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

Usamos las condiciones de contorno

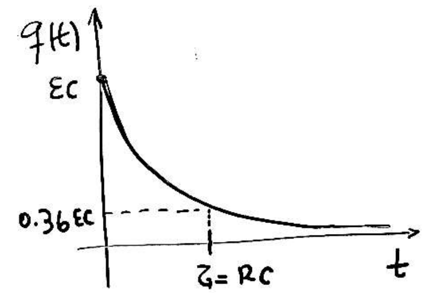
$$a\ t=0 \quad q(0) = \varepsilon C \Rightarrow q(t) = \varepsilon C\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

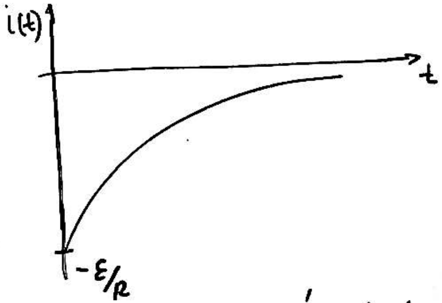
$$\Rightarrow \quad V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \varepsilon\, e^{-t/RC}$$

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{\varepsilon}{R}\, e^{-t/RC}$$

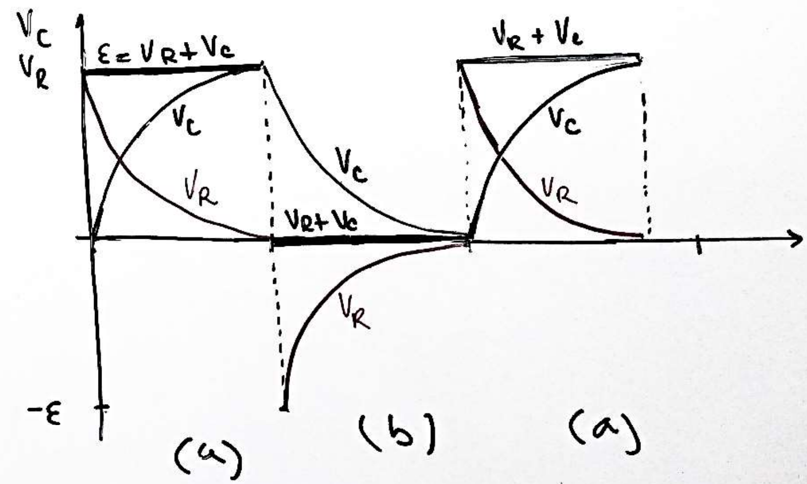
$$V_R(t) = I(t)R = -\varepsilon\, e^{-t/RC}$$

Si graficamos $q(t)$ e $I(t)$

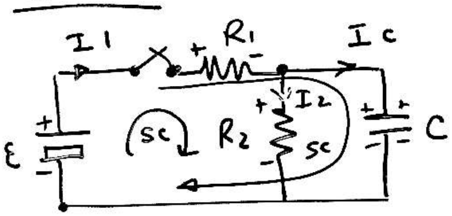




Supongamos que modificamos la posición del interruptor (S) entre los punto a y b alternativamente.



Ejemplo



Planteamos las ecuaciones a partir de las leyes de Kirchoff.

① $\boxed{I_1 = I_2 + I_c}$

② $\mathcal{E} - I_1R_1 - I_2R_2 = 0$

③ $\mathcal{E} - I_1R_1 - \frac{q}{C} = 0$

②-③

$$\boxed{-I_2R_2 + \frac{q}{C} = 0}$$

Como q es la carga en el capacitor,

$I_c = \frac{dq}{dt}$ si reemplazamos en ①

$$I_1 = I_2 + \frac{dq}{dt}$$

reemplazamos en ③, nos queda:

④ $\mathcal{E} - I_2R_1 - \frac{dq}{dt}R_1 - \frac{q}{C} = 0$

de ②-③ nos queda que

$$+I_2R_2 = \frac{q}{C} \Rightarrow I_2 = \frac{q}{CR_2}$$

reemplazando en ④

$$\mathcal{E} - \frac{q}{CR_2}R_1 - \frac{dq}{dt}R_1 - \frac{q}{C} = 0$$

multiplicamos por (-1), dividimos por R_1 y agrupamos los términos donde tenemos q.

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right) - \frac{\mathcal{E}}{R_1} = 0$$

nuevamente tenemos que usar separación de variables

$$-\frac{CR_2R_1}{(R_1+R_2)}\frac{dq}{dt} = q - \mathcal{E}\frac{R_2C}{(R_1+R_2)}$$

$$\frac{dq}{\left(q - \frac{\mathcal{E}CR_2}{(R_1+R_2)}\right)} = -\frac{(R_1+R_2)}{CR_2R_1}\,dt$$

Integramos ambos lados de la igualdad,

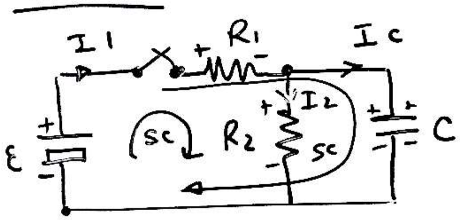
$$\ln\left[q - \mathcal{E}C\frac{R_2}{(R_1+R_2)}\right] = -\frac{1}{C}\frac{(R_1+R_2)}{R_1R_2}t + cte$$

$$q - \frac{\mathcal{E}CR_2}{(R_1+R_2)} = cte^*\, e^{-\frac{1}{C}\frac{(R_1+R_2)}{R_1R_2}t}$$

e^{cte}

$$q(t) = \frac{\mathcal{E}CR_2}{(R_1+R_2)} + cte^*\, e^{-\frac{1}{C}\frac{(R_1+R_2)}{R_1R_2}t}$$

Ejemplo



$$q(t) = \frac{\varepsilon C R_2}{R_1+R_2} + cte^{*} \, e^{-\frac{(R_1+R_2)}{R_1 R_2}\frac{1}{C}t}$$

usamos las condiciones de contorno, es decir

$$q(t=0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad cte^{*} = -\frac{\varepsilon C R_2}{R_1+R_2}$$

$$\Rightarrow \quad q(t) = \frac{\varepsilon C R_2}{R_1+R_2}\left(1 - e^{-\frac{(R_1+R_2)}{R_1 R_2}\frac{t}{C}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I_c(t) = (-)\frac{\varepsilon \cancel{C}\cancel{R_2}}{\cancel{(R_1+R_2)}}(-)\frac{\cancel{(R_1+R_2)}}{R_1\cancel{R_2}\cancel{C}}\, e^{-\frac{(R_1+R_2)}{R_1 R_2}\frac{t}{C}}$$

$$\boxed{I_c(t) = \frac{\varepsilon}{R_1}\, e^{-\frac{(R_1+R_2)}{R_1 R_2}\frac{t}{C}}}$$

$$V_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{\varepsilon R_2}{(R_1+R_2)}\left(1 - e^{-\frac{(R_1+R_2)}{R_1 R_2}\frac{t}{C}}\right)$$

$$I_2 = \frac{V_c}{R_2} = \frac{\varepsilon}{R_1+R_2}\left(1 - e^{-\frac{(R_1+R_2)}{R_1 R_2}\frac{t}{C}}\right)$$

$$I = I_2 + I_c = \frac{\varepsilon}{R_1+R_2}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\, e^{-\frac{(R_1+R_2)}{R_1 R_2}\frac{t}{C}}\right)$$

Para este circuito la constante de relajación es

$$\tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1+R_2}$$

Si $R_2 \to \infty$ $\quad \tau = \frac{\cancel{R_2} R_1 C}{\cancel{R_2}(1+\frac{R_1}{R_2})} \approx R_1 C$

Si $R_1 \to 0$ $\quad \tau = \frac{R_2 C}{1+R_2/R_1} \approx 0$

Si $R_1 >> R_2$ $\quad \tau = \frac{\cancel{R_1} R_2 C}{\cancel{R_1}(1+\frac{R_2}{R_1})} \approx R_2 C$