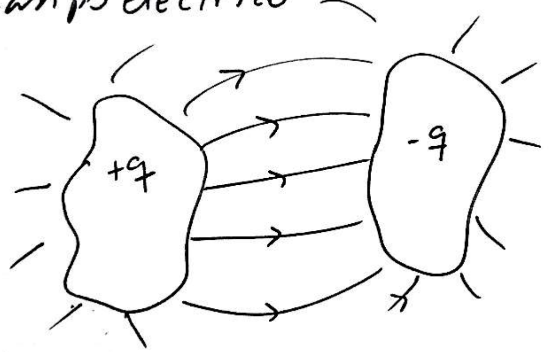
CAPACITORES

Dispositivo que almacena energía eléctrica en un campo eléctrico



- Consiste de dos conductores cada uno de ellos con carga q de ≠ signo

- Cuando el capacitor está descargado la carga eléctrica en cada conductor es nulo
- Durante el proces de carga se transporta carga de un conductor a otro, eso cuesta trabajo por lo que se establece una diferencia de potencial eléctrico

$$\Delta V = \frac{W}{q}$$

- La carga total del capacitor sigue siendo nula.

Se observa que la cantidad de carga que se acumula en las placas del capacitor es proporcional a la diferencia de potencial, es decir

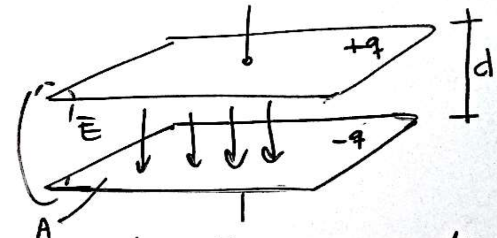
$$\boxed{Q = C\,\Delta V}$$

Donde C es una constante, que denominamos Capacitancia $\left[\frac{C}{V}\right] = [F]$ Faradio

y varía, usualmente, entre pico y milifaradios.

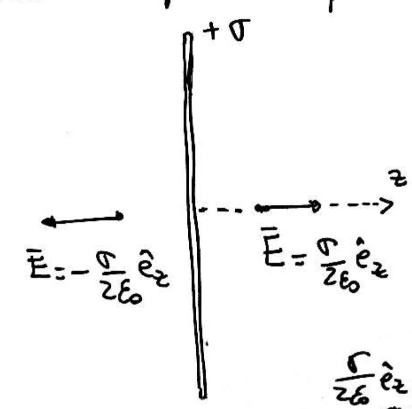
Capacitor de placas planas

Consiste de dos placas conductoras, paralelas de área A y separadas una distancia d.

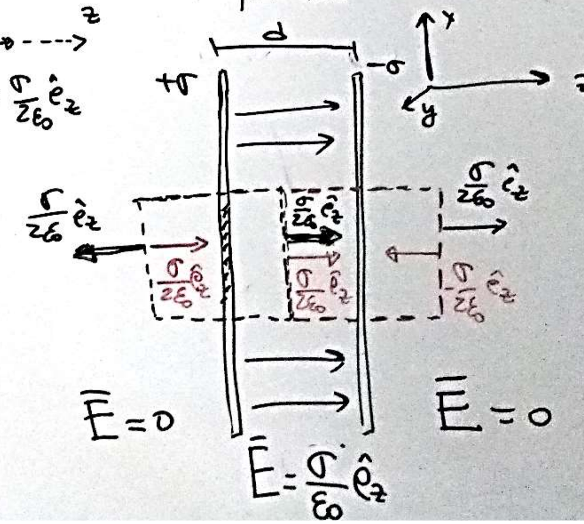


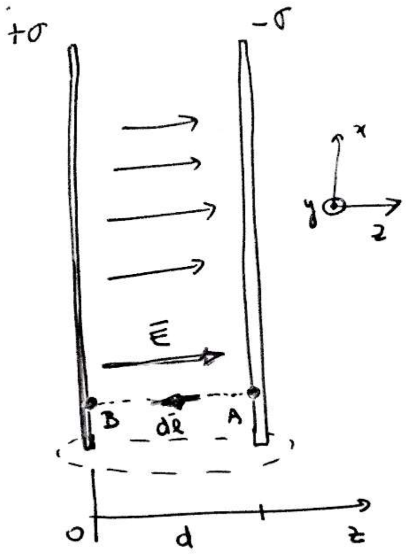
Donde d<< comparada con las dimensiones de las placas ⟹ consideramos $\bar{E}$ uniforme y despreciamos el efecto de borde.

Para un plano infinito el campo eléctrico es,



Si tenemos dos placas infinitas





$$V_B - V_A = -\int_A^B \bar{E}\cdot d\bar{l}$$

Como $\bar{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{e}_z$ y $d\bar{l} = dz\,\hat{e}_z$

$$V_B - V_A = -\int_d^0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{e}_z\cdot dz\,\hat{e}_z$$

$$= -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(-d) = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{A\varepsilon_0}d \qquad \sigma = \frac{Q}{A}$$

reordenando,

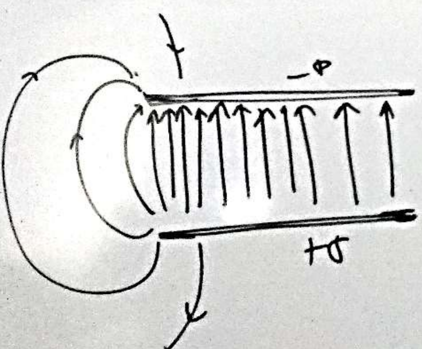
$$Q = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\Delta V$$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

Capacidad para un capacitor de placas paralelas

Obs. Efecto de borde

Recordemos que asumimos que $\bar{E}$ es uniforme entre las placas lo cual es una aproximación!



Sucede que en realidad la carga total

$$Q \neq \sigma A$$

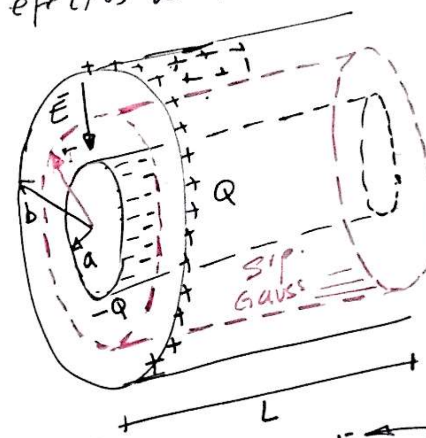
existe una pequeña corrección por los efectos de borde. Para minimizar este efecto se pide que $d <<$

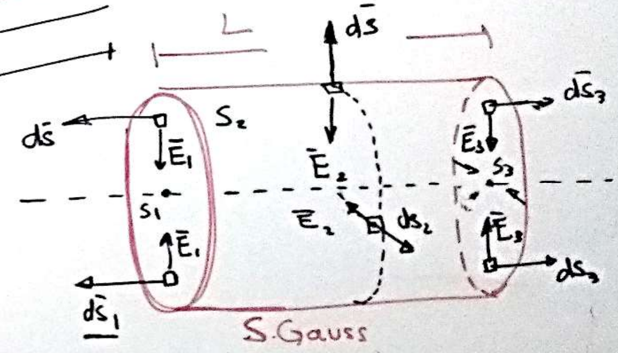
Capacitor Cilíndrico

Se compone de dos cilindros coaxiles de radio a y b y longitud L, donde $\underline{L >> b}$ y despreciamos los efectos de borde.

Usando la Ley de Gauss elegimos un cilindro de radio r donde

$$a < \underline{r} < b$$





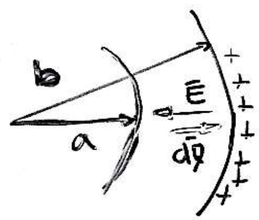
$$\oint\!\!\!\oint_{SG} \bar{E}\cdot d\bar{S} = \iint_{S_2} \bar{E}_2\cdot d\bar{S}_2 = -E\,2\pi r L = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow |E| = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r L} \quad \therefore \quad \boxed{\bar{E} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon r L}\hat{e}_r}$$

La diferencia de potencial entre los cilindros resulta:

$$V_b - V_a = -\int_a^b (-)\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r L}\,\hat{e}_r \cdot dr\,\hat{e}_r$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_a^b \frac{1}{r}\,dr$$



$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{b}{a}$$

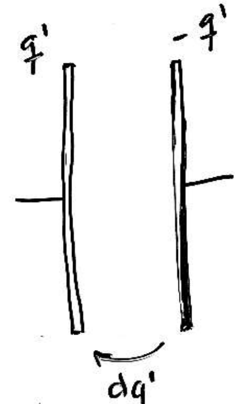
Si reacomodamos, resulta,

$$Q = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln b/a}\,\Delta V$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln b/a}}$$

Almacenamiento de energía

La energía almacenada tiene que ver con el trabajo realizado para transportar la carga negativa de una placa a otra.



$$dW = V(q')\,dq'$$

Como, $q' = C\,V(q')$

tenemos,

$$dW = \frac{q'}{C}\,dq'$$

El trabajo total realizado es,

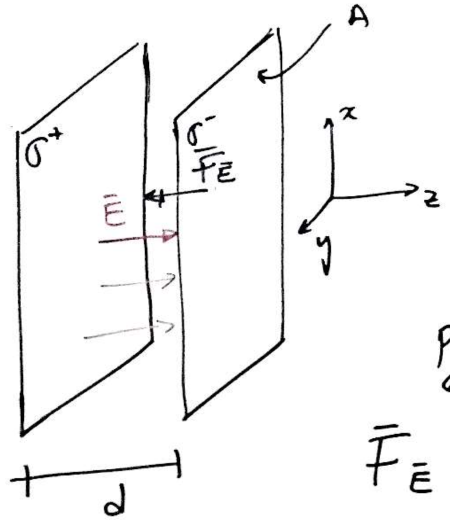
trabajo realizado → $W = \int_0^Q \frac{q'}{C}\,dq' = \frac{Q^2}{2C} = U$ ← energía almacenada

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \qquad Q = CV$$

Para un capacitor de placas paralelas de área A y separación d $\Rightarrow$ $Vol = A \cdot d$

$$u = \frac{U}{Vol} = \frac{1}{2}\frac{\overbrace{\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)}^{C} V^2}{\underbrace{Ad}_{Vol}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = u}$$

Otra forma de calcular la energía almacenada en un capacitor es mediante el cálculo del trabajo realizado para separar las dos placas.



En el interior del capacitor,

$$\bar{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{e}_z$$

La fuerza de la placa positiva sobre la negativa es:

$$\bar{F}_{\bar{E}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\sigma A)\hat{e}_z$$

campo eléctrico debido a una placa

carga eléctrica sobre la que aparece una fuerza

Para separar la placa negativa necesitamos una fuerza

$$\bar{F}_{EXT} = -\bar{F}_{\bar{E}} = +\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}A\,\hat{e}_z$$

$$W_{EXT} = \bar{F}_{EXT}\cdot\bar{d} = \frac{\sigma^2 A d}{2\varepsilon_0}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0}$$

$$\bar{d} = d\hat{e}_z$$

$$W_{EXT} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A d = U_{pot}$$

$$\therefore \boxed{u = \frac{U_{pot}}{vol} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

energía por unidad de volumen.

Ejemplo: a) Cálculo de la capacitancia de la Tierra cuyo radio es R_T.

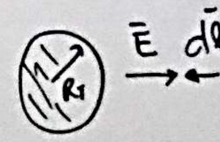
b) La distancia r donde se encuentra almacenado la mitad de la energía

a) Suponemos que la tierra tiene una carga Q, luego usando la ley de Gauss se puede calcular el campo eléctrico para $r > R_T$

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{e}_r$$

Calculamos la diferencia de potencial entre la tierra y el ∞,

$$V_{R_T} - \underbrace{V_\infty}_{=0} = -\int_\infty^{R_T}\bar{E}\cdot d\bar{l} = -\int_\infty^{R_T}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{e}_r\cdot dr\,\hat{e}_r$$



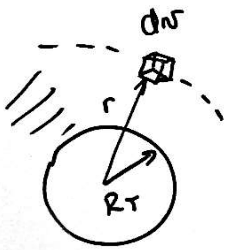
$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^{R_T}\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$V_{R_T} - \underbrace{V_\infty}_{=0} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^{R_T}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\Big|_\infty^{R_T}$$

$$V_{R_T} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R_T} \Rightarrow Q = \underbrace{(4\pi\varepsilon_0 R_T)}_{C}\,V_{R_T}$$

$$\boxed{C_{Tierra} = 4\pi\varepsilon_0 R_T}$$

b)



$$dU_E = u_E\,dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,\underbrace{r^2 \operatorname{seno}\,d\theta\,d\phi\,dr}_{dv}$$

$$\boxed{u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

$$dU_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\,\frac{Q^2}{r^{\cancel{4}2}}\,\cancel{r^2}\operatorname{seno}\,d\theta\,d\phi\,dr$$

$$U_E = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_{R_T}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}\operatorname{seno}\,d\phi\,d\theta\,dr$$

$$U_E = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{R_T}^{\infty}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\,\left.-\frac{1}{r}\right|_{R_T}^{\infty}$$

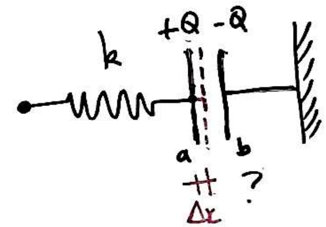
$$\boxed{U_E = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_T} = \frac{Q^2}{2C_{Tierra}}}$$

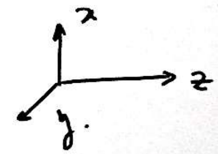
¿Cuál es el radio donde $U_E(r) = \frac{1}{2}U_E$?

$$U_E(r) = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R_T}\right) = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R_T}$$

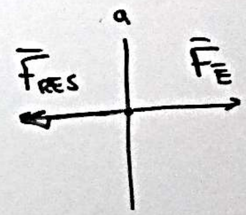
$$-\frac{1}{r} + \frac{1}{R_T} = \frac{1}{2R_T} \Rightarrow \boxed{r = 2R_T}$$

Ejemplo 2:





La fuerza del resorte tiene que igualarse a la fuerza del campo eléctrico.



$$\bar{F}_{RES} = -k\Delta x\,\hat{e}_z$$

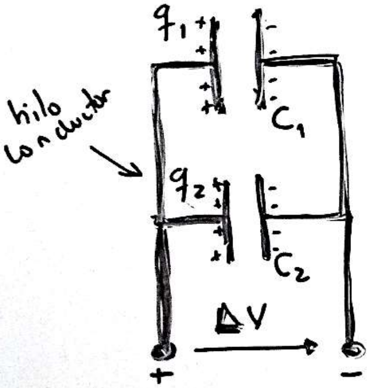
$$\bar{F}_E = Q\,\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{e}_z$$

$$\bar{F}_{RES} + \bar{F}_E = 0 \Rightarrow k\Delta x = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A}}$$

Capacitores en paralelo

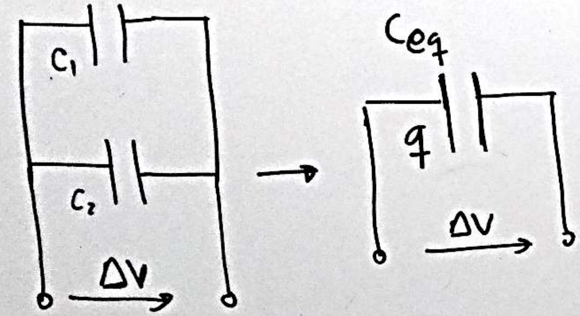
Supongamos dos capacitores conectados de la siguiente manera:



La diferencia de potencial es la misma para los dos capacitores, así:

$$C_1 = \frac{q_1}{\Delta V} \quad y \quad C_2 = \frac{q_2}{\Delta V}$$

La pregunta que nos hacemos es si podemos reemplazar los dos capacitores por uno sólo que sea equivalente,



Como ΔV es igual en ambos casos, la carga en el capacitor equivalente será

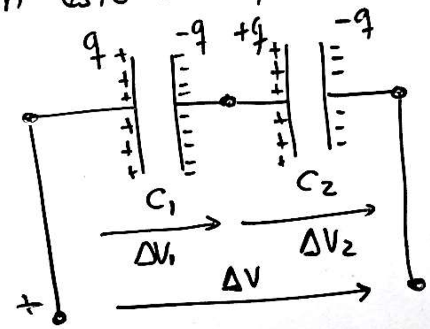
$$q = q_1 + q_2$$

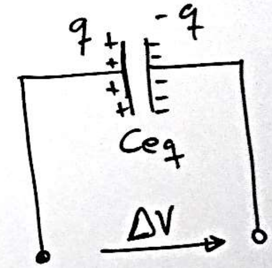
$$\Rightarrow \quad C_{eq} = \frac{q_1 + q_2}{\Delta V} = \frac{q_1}{\Delta V} + \frac{q_2}{\Delta V}$$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$$ de manera general $$\boxed{C_{eq} = \sum_i C_i}$$

Capacitores en serie

En este caso,





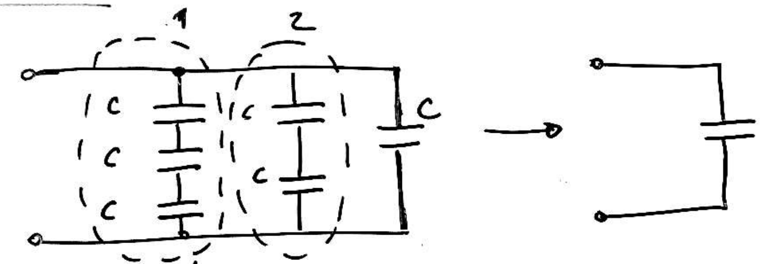
$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = \frac{q}{C_{eq}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{eq}}} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

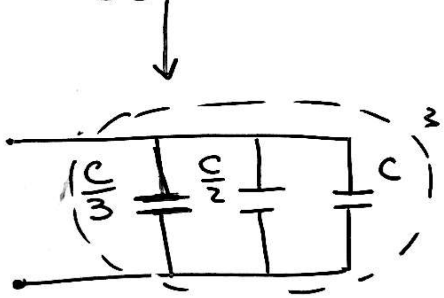
De manera general,

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}}$$

Ejemplo



$C_{eq} = \frac{11}{6}C$

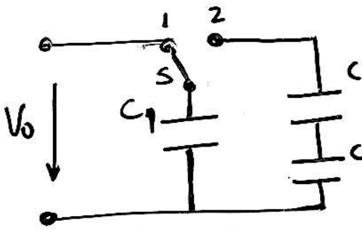


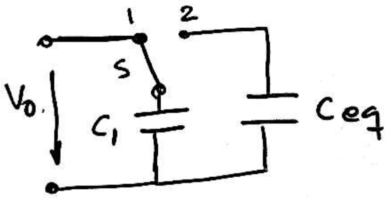
1) $\frac{1}{C_{eq}^{1}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{3}{C} \Rightarrow C_{eq}^{1} = \frac{C}{3}$

2) $\frac{1}{C_{eq}^{2}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C} \Rightarrow C_{eq}^{2} = \frac{C}{2}$

3) $\boxed{C_{eq}^{3} = C + \frac{C}{2} + \frac{C}{3} = \frac{11}{6}C}$

Ejemplo



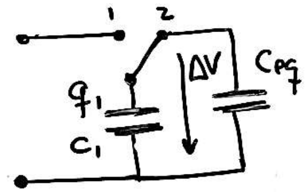


Inicialmente:

$q_1 = C_1 V_0 \quad q_2 = q_3 = 0$

$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

Movemos S de $1 \to 2$ $\quad q_1 \to q_1' \;$ y $\; 0 \to q_{eq}$



$\circledast \quad q_1 = q_1' + q_{eq}$

por otro lado:

$\circledast \quad \frac{q_1'}{C_1} = \frac{q_{eq}}{C_{eq}} \Rightarrow q_1' = \frac{C_1}{C_{eq}} q_{eq}$

$$\boxed{q_{eq} = \frac{q_1}{\left(1 + \frac{C_1}{C_{eq}}\right)} = \frac{C_1 V_0}{\left(1 + \frac{C_1}{C_{eq}}\right)}}$$

En aste caso $\quad q_2 = q_3 = q_{eq}$

$\Delta V_2 = q_{eq}/C_2 \qquad \Delta V_3 = q_{eq}/C_3$

Finalmente

$$\boxed{q_1' = \frac{C_1}{C_{eq}} q_{eq} = \frac{C_1 V_0}{\left(\frac{C_{eq}}{C_1} + 1\right)}}$$