

Ley de Ampere

La clase pasada mencionamos que el $\nabla \times \vec{B}$ obtenido a partir de la Ley de Biot y Savart, resulta,

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad \text{Ley de Ampere en forma diferencial}$$

Si trabajamos esta ecuación y calculamos la integral de superficie en ambos términos de la igualdad

$$\iint_S \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

$$\iint_S \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$



Ley de Ampere
forma
integral

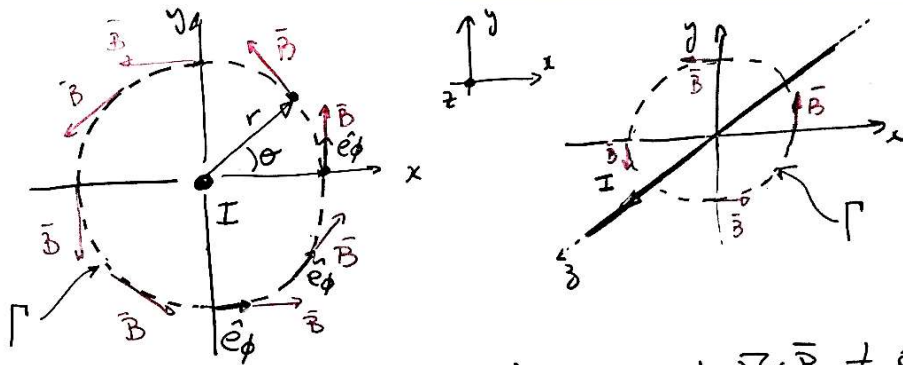
$$\iint_S \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Teorema de Stokes

Caso de un cable infinito

La clase pasada calculamos \vec{B} para un cable infinito en un punto \vec{r} ,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\phi$$



Se puede ver, gráficamente que el $\nabla \times \vec{B} \neq 0$, es decir la circulación de \vec{B} es $\neq 0$

Si calculamos la integral de camino de \vec{B} alrededor de un círculo de radio r , centrado en el cable, tenemos,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\phi \cdot d\vec{l} \hat{e}_\phi$$

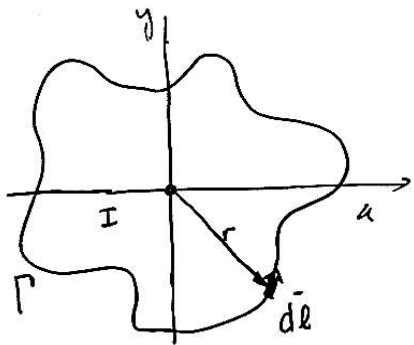
Como $d\vec{l} = r d\theta \hat{e}_\phi$ y $\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi = 1$ tenemos que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r d\theta = \mu_0 I$$

Obviamente se verifica la Ley de Ampere.

Obs: El resultado de la $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l}$ no depende del radio del círculo elegido

Obs 2: Con cualquier loop que encierre el cable con corriente I , no importa la forma, se obtiene el mismo resultado.



De manera general

$$d\vec{l} = dr \hat{e}_r + r d\phi \hat{e}_\phi + dz \hat{e}_z$$

Por otro lado sabemos que, en cualquier elemento de trayectoria $d\vec{l}$ vale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\phi$$

\therefore si hacemos el producto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ tenemos:

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\phi \cdot (dr \hat{e}_r + r d\phi \hat{e}_\phi + dz \hat{e}_z)$$

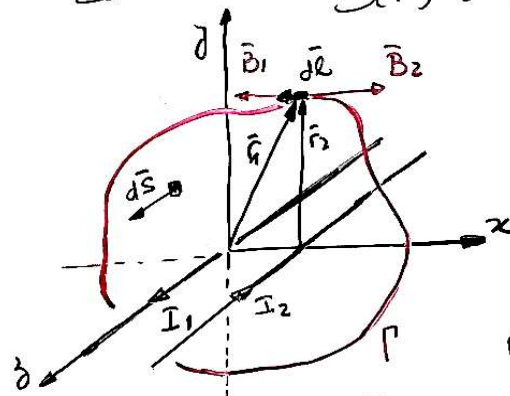
$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

E) resultado es independiente del loop elegido.

Obs. 3: Principio de Superposición

Si tenemos dos cables con corrientes opuestas y un loop que los encierra a ambos podemos aplicar el principio de superposición para calcular $\vec{B}(\vec{r})$.

Es decir $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_1(\vec{r}) + \vec{B}_2(\vec{r})$



$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_1$$

$$\oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I_2$$

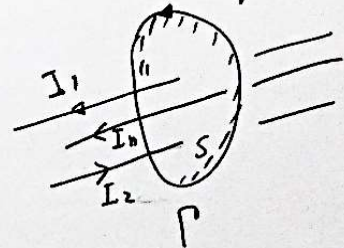
Observar que para \vec{B}_2 el ángulo entre \vec{B}_2 y $d\vec{l} \hat{e}_\phi$ es $180^\circ \Rightarrow \cos \hat{B}_2 \hat{e}_\phi = -1$
Luego

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2) = \mu_0 I_{enc}$$

o de manera general

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

donde I_{enc} es la corriente encerrada por Γ o la corriente que atraviesa la superficie S

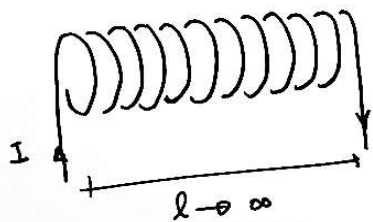


Aplicación de la ley de Ampere

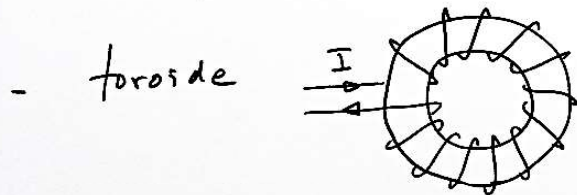
- En el caso de un cable infinito puede aplicarse la Ley de Ampere. Simetría cilíndrica

Si el cable no es recto e infinito, no puede aplicarse la Ley de Ampere, debe utilizarse la Ley de Biot y Savart para calcular \vec{B} en un punto \vec{r} .

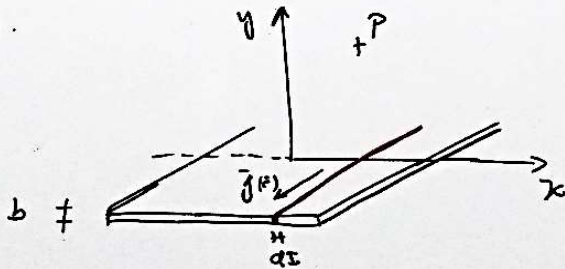
- solenoi de de dimensiones infinitas



$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

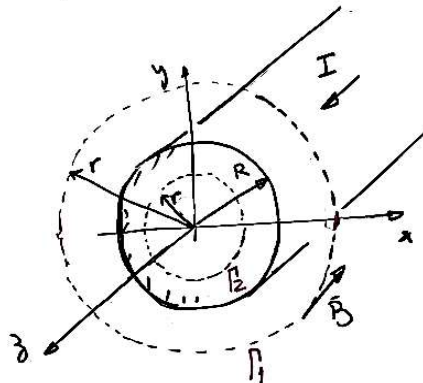


- hoja infinita de espesor b con densidad de corriente $\vec{j}(\vec{r})$.



Ejemplo aplicación Ley de Ampere

Cable de radio R de longitud infinita que transporta una corriente I .



a) Si $r \gg R$ el loop encierra totalmente el cable, aplicamos la Ley de Ampere

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

A lo largo de Γ_1 el $|\vec{B}| = cte \Rightarrow$

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\phi$$

b) Si $r < R$ la corriente encerrada es una fracción de I , es decir ($j = cte$)

$$I_{enc} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I = I \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

aplicamos la ley de Ampere en el circuito Γ_2

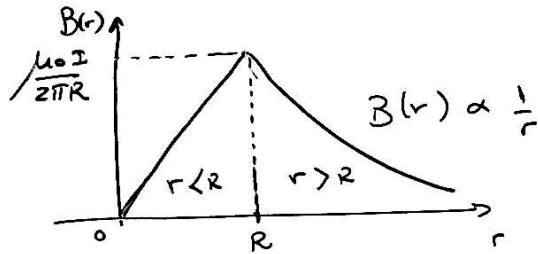
$$\oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \quad \text{como en}$$

$$\Gamma_2 \quad |\vec{B}| = cte \quad \text{resulta que} \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2}$$

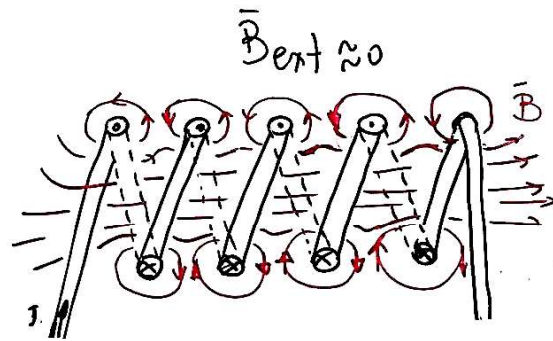
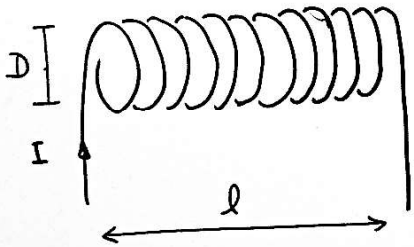
finalmente en forma vectorial

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{r}{R^2} \hat{\phi}$$

Si graficamos la variación de $\vec{B}(\vec{r})$ con r resulta,

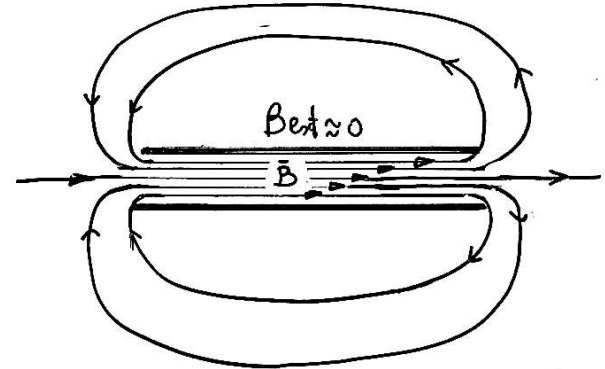


Solenoides

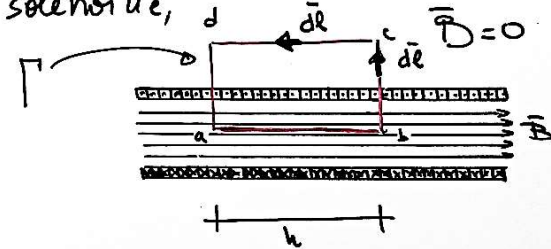


Si el solenoide tiene espiras muy separadas, \vec{B} que resulta la suma del campo magnético de cada una de las espiras, tiende a anularse entre espiras, mientras que en el centro se suma, resultando \vec{B} paralelo al eje del solenoide. A medida que $l \gg D$, el solenoide se vuelve ideal y se puede aproximar $\vec{B}_{ext} \approx 0$

Las líneas de campo que salen del solenoide se cierran por fuera e ingresan al solenoide



A continuación vamos a aplicar la Ley de Ampere en el solenoide,



Aproximamos que \vec{B} es uniforme en el interior del solenoide y aplicamos la ley de Ampere

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \underbrace{\int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=0} + \underbrace{\int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=0} + \underbrace{\int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=0}$$

$$\therefore \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bh = \mu_0 NI$$

donde N es el número de espiras encerradas por el loop de integración Γ .

Luego tenemos que

$$\boxed{B = \mu_0 \frac{N}{h} I = \mu_0 n I}$$

donde n : número de espiras por unidad de longitud del solenoide

Obs: Si bien este resultado se obtuvo para un solenoide ideal, este resultado es aproximado al valor real.

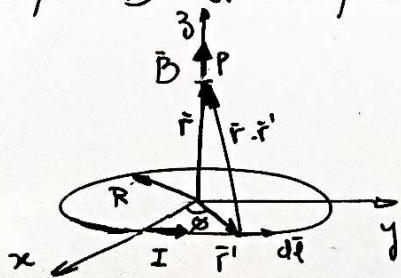
Obs: Observar que $|B|$ no depende del diámetro "D" del solenoide ni de la longitud "l".

Obs: Así como un capacitor permite generar un E constante, un solenoide permite generar un B constante.

Solenoide de longitud finita

Vamos a calcular el valor de B a lo largo del eje de un solenoide de dimensión finita usando Biot-Savart

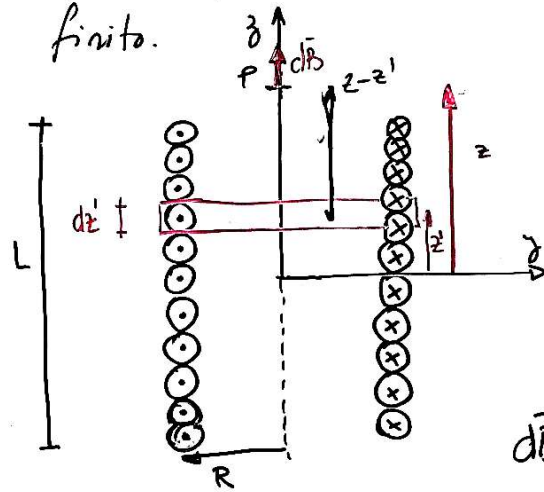
Recordemos que para una espira de radio R el campo B en un punto sobre el eje de la espira es:



$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I R^2}{z (R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_z$$

$$|r| = z$$

Veamos como usar este resultado para un solenoide finito.



tomamos un dz' en la longitud del solenoide y vemos cual es el campo B en el punto P

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{ndz'I R^2}{(R^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \hat{e}_z$$

$$\therefore \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I n R^2}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{(R^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \hat{e}_z$$

resolvemos por tablas,

$$\vec{B}(P) = - \frac{\mu_0 I n R^2}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d(z-z')}{(R^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \hat{e}_z$$

$$\vec{B}(P) = - \frac{\mu_0 I n R^2}{2} \frac{(z-z')}{R^2 (R^2 + (z-z')^2)^{1/2}} \Big|_{-L/2}^{L/2} \hat{e}_z$$

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I n}{2} \left[\frac{(L/2 - z)}{(R^2 + (z - L/2)^2)^{1/2}} + \frac{(L/2 + z)}{(R^2 + (z + L/2)^2)^{1/2}} \right] \hat{e}_z$$

$$\vec{B}(p) = \frac{\mu_0 n I}{z} \left[\frac{L/2 - z}{(R^2 + (z - L/2)^2)^{3/2}} + \frac{L/2 + z}{(R^2 + (z + L/2)^2)^{3/2}} \right] \hat{e}_z$$

Consideremos $B_0 = \mu_0 n I$. Vamos a graficar

$$\frac{B(z)}{B_0} \text{ vs. } \frac{z}{R}$$

Si $L = 10R$

$$\frac{B(z)}{B_0} = \frac{1}{2} \left[\frac{5R - z}{(R^2 + (z - 5R)^2)^{3/2}} + \frac{5R + z}{(R^2 + (z + 5R)^2)^{3/2}} \right]$$

Si $z = 0$ $B(z)/B_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{5R}{\sqrt{26}R} + \frac{5R}{\sqrt{26}R} \right) = 0.98$

Si $z = 5R$ $B(z)/B_0 = \frac{1}{2} \frac{10R}{\sqrt{101}R} = 0.497$

Si $z = 10R$ $B(z)/B_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{-5R}{\sqrt{26}R} + \frac{15R}{\sqrt{226}R} \right) = 0.0086$

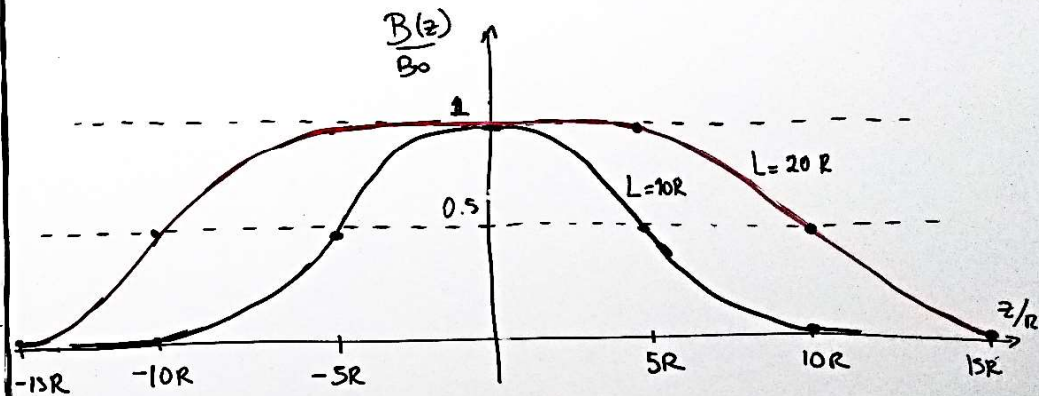
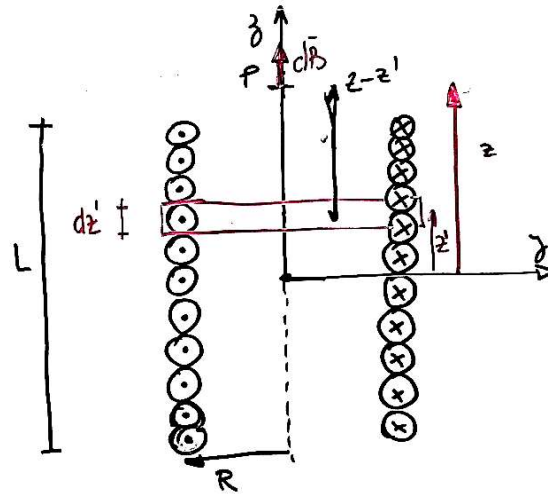
Si $L = 20R$ $B(z)/B_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{10R - z}{(R^2 + (z - 10R)^2)^{3/2}} + \frac{10R + z}{(R^2 + (z + 10R)^2)^{3/2}} \right]$

Si $z = 0$ $\frac{B(z)}{B_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{10}{\sqrt{101}} + \frac{10}{\sqrt{101}} \right) = 0.995$

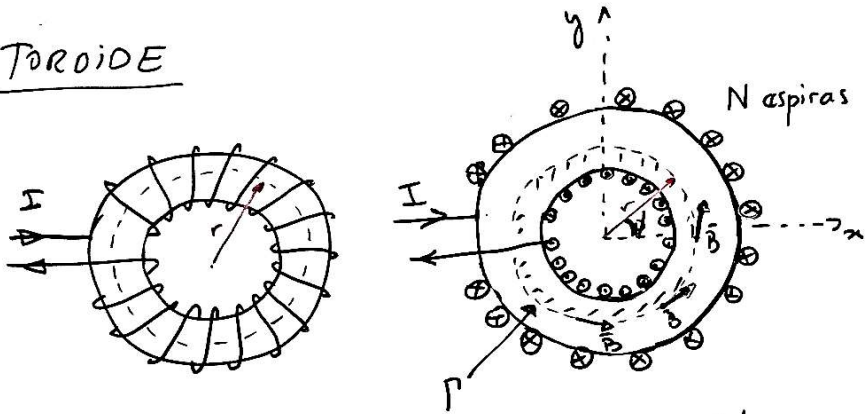
Si $z = 5R$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{\sqrt{26}} + \frac{15}{\sqrt{226}} \right) = 0.989$

Si $z = 10R$ $= \frac{1}{2} \frac{20}{\sqrt{401}} = 0.499$

Si $z = 20R$ $= \frac{1}{2} \left(-\frac{10}{\sqrt{101}} + \frac{30}{\sqrt{1901}} \right) = 0.0022$



TOROIDE



Si aplicamos la ley de Ampere, resulta.

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \quad \boxed{I_{enc} = NI}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi r = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \hat{e}_{\phi}}$$

A diferencia de lo que sucede en el solenoide, \vec{B} varía con el radio del camino de integración.