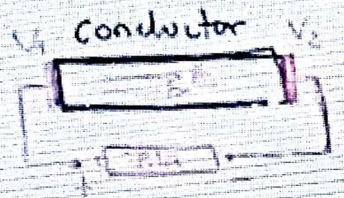
Corriente y resistencia

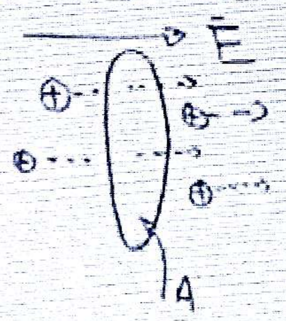
Anteriormente vimos las propiedades de los materiales conductores eléctricos. Es decir que $\bar{E}=0$ en su interior, que el exceso de carga está en la superficie, que es un espacio equipotencial, etc.

En estos casos la presencia de un $\bar{E}\neq 0$ induce el movimiento de cargas que se acomodan en la superficie hasta que $\bar{E}=0$.

Una situación diferente tiene lugar cuando es posible forzar un $\bar{E}\neq 0$ en el interior del conductor.



En este caso se produce el movimiento permanente de carga eléctrica en el conductor, o al menos mientras la pila "esté cargada"



Si tenemos un $\bar{E}\neq 0$, generamos un flujo de carga eléctrica en el interior del conductor.

Definimos la corriente eléctrica a través de A como la cantidad de carga ΔQ que atraviesa la superficie A en un tiempo Δt,

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

las unidades son amperes

$$[A] = \left[\frac{C}{s}\right]$$

en el límite cuando $\Delta t \to 0$

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}}$$

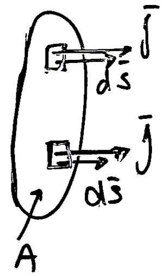
Convención: La dirección de la corriente es la dirección hacia donde fluyen las cargas positivas.

Densidad de corriente: La corriente I es una cantidad macroscópica. Es útil definir una cantidad microscópica, la densidad de corriente $\vec{J}$, que es un vector que indica la dirección, sentido y magnitud de carga que atraviesa un ΔA en un Δt, es decir

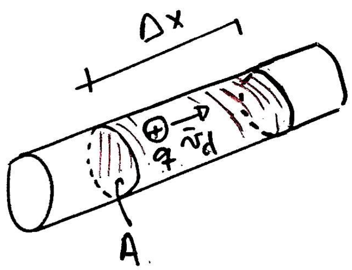
$$|\vec{J}| = \frac{\Delta Q}{\Delta t\, \Delta A}$$

la relación entre $\bar{j}$ y la corriente es,

$$\boxed{I = \iint_A \bar{j} \cdot d\bar{s}}$$



Análisis microscópico de $\vec{j}$



Supongamos que el conductor tiene n portadores de carga por unidad de volumen

$n \left[\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^3}\right]$

Luego en el volumen $\underline{A\Delta x}$ tenemos,

$$\Delta Q = q\,\underline{n A \Delta x} \quad (1)$$

Si los portadores de carga eléctrica se mueven a velocidad $\bar{v}_d$ $\Rightarrow$

$$\Delta x = |\bar{v}_d|\,\Delta t$$

reemplazando en (1)

$$\Delta Q = q\,n\,A\,|\bar{v}_d|\,\Delta t$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = q\,n\,A\,|\bar{v}_d|$$

Si suponemos que la densidad de corriente es uniforme,

$$I = \iint_A \bar{j} \cdot d\bar{s} = |\bar{j}|\,A$$

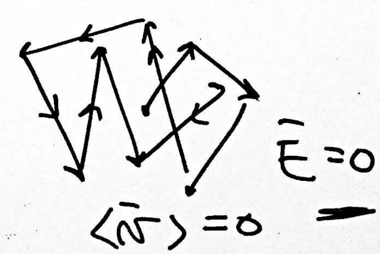
$$\Rightarrow \quad |\bar{j}| = q\,n\,|\bar{v}_d| \quad \text{o}$$

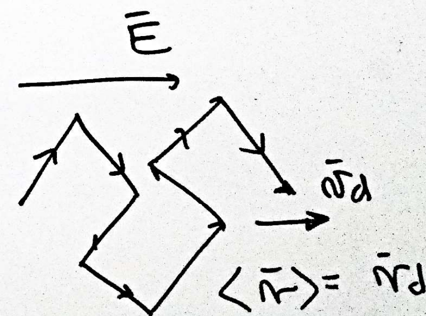
$$\boxed{\bar{j} = q\,n\,\bar{v}_d}$$

$\bar{v}_d$ es la velocidad de drift, que es la velocidad promedio de los portadores de carga eléctrico en el material.

Los portadores de carga en un material sufren colisiones q' vuelven su recorrido errático con una $\langle v \rangle = 0$. Si $\bar{E} \neq 0$,

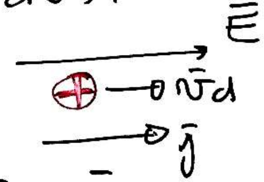
$$\langle \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}_d \rangle \neq 0$$



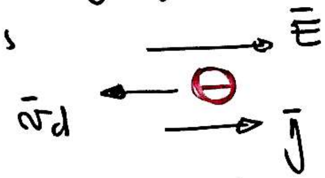


Como $\bar{J} = q n \bar{v}_d$

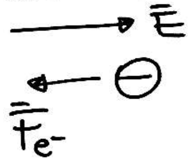
si $q > 0$ $\bar{J}$ y $\bar{v}_d$ apuntan en la misma dirección.



si $q < 0$ $\bar{J}$ y $\bar{v}_d$ apuntan en direcciones opuestas



Analicemos en más detalle que sucede con los e^- en un campo eléctrico cte.



$$\bar{a} = \frac{\bar{F}_{e^-}}{m_e} = \frac{\overset{\bar{F}_{e^-}}{-e\bar{E}}}{m_e}$$

antes de que el $\bar{e}$ tenga una colisión en un tiempo t alcanza una velocidad,

$$\bar{v}_f = \bar{v}_i + \bar{a}t = v_i - \frac{e\bar{E}t}{m_e}$$

Si analizamos un número grande de estos intervalos, resulta que el promedio es:

$$\langle \bar{v}_f \rangle = \langle \bar{v}_i \rangle - \frac{e\bar{E}}{m_e}\langle t \rangle = \bar{v}_d$$

Considerando que $\langle v_i \rangle = 0$ y $\langle t \rangle = \tau$

$$\bar{v}_d = -\frac{e\tau\bar{E}}{m_e}$$

Si ahora reemplazamos en la expresión para la densidad de corriente:

$$\bar{J} = q n \bar{v}_d$$

$$\boxed{\bar{J} = \frac{e^2 n \tau \bar{E}}{m_e}}$$

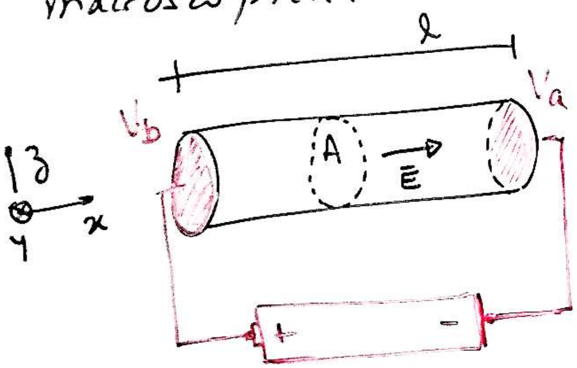
Obs: puede verse que $\bar{J}$ y $\bar{E}$ tienen la misma dirección no importa el signo de la carga.

La relación entre $\bar{J}$ y $\bar{E}$ puede escribirse

$$\boxed{\bar{J} = \sigma \bar{E}}$$ Ley de Ohm microscópica

siendo $$\boxed{\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m_e}}$$ conductividad eléctrica del material

Veamos como obtener la ley de Ohm macroscópica.



Usamos una "pila" para controlar la diferencia de potencial en los extremos del material.

Para obtener el campo eléctrico en el material podemos usar Laplace,

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2}=0 \Rightarrow V(x)=\frac{(V_a-V_b)}{l}x+V_b$$

$$\Rightarrow \quad \bar{E}(x)=-\nabla V(x)$$

$$\bar{E}(x)=\frac{(V_b-V_a)}{l}\,\hat{e}_x$$

usando que

$$|\bar{J}|=\sigma|\bar{E}|=\sigma\frac{\Delta V}{l}=\frac{I}{A}$$

$$\Delta V = I\,\frac{1}{\sigma}\frac{l}{A}$$

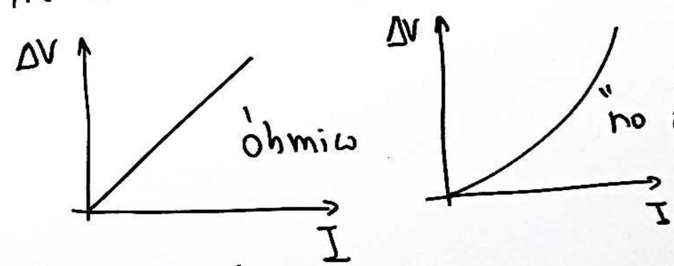
si llamamos $R=\frac{1}{\sigma}\frac{l}{A}$ Resistencia.

resulta que $\boxed{\Delta V = R I}$ Ley de Ohm macroscópica.

Obs: Las unidades son

$$[V]=[\Omega][A] \qquad \Omega: \text{Ohm}$$

Obs: Se dice que un material tiene un comportamiento óhmico si la relación entre ΔV e I es lineal,



Resistividad eléctrica: Es el recíproco de la conductividad eléctrica, es decir:

$$\boxed{\rho=\frac{1}{\sigma}=\frac{m_e}{n e^2 \tau}}$$

es decir que $\boxed{R=\rho\frac{l}{A}}$

Obs: La resistividad del material varía con la temperatura. En el caso de los metales (conductores eléctricos) esta relación es lineal

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \alpha (T - T_0) \right]$$

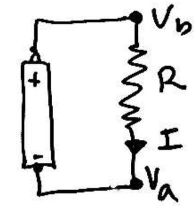
α: coeficiente de temperatura de resistividad

Algunos valores típicos a $T = 20\ °C$

Material		$\rho\ [\Omega\, m]$	$\sigma\ [\Omega\, m]^{-1}$	$\alpha\ (°C)^{-1}$
Metal	Ag - Plata	$1.59\ 10^{-8}$	$6.29\ 10^{7}$	0.0038
	Cu - Cobre	$1.72\ 10^{-8}$	$5.81\ 10^{7}$	0.0039
Aleación	Bronce	$7\ 10^{-8}$	$1.4\ 10^{7}$	0.002
Semiconductor	grafito	$3.5\ 10^{-5}$	$2.9\ 10^{4}$	-0.0005
	Germanio	0.46	2.2	-0.048
	Silicio	640	$1.6\ 10^{-3}$	-0.075
Aislante	vidrio	$10^{10} - 10^{14}$	$10^{-14} - 10^{-10}$	
	Azufre	10^{15}	10^{-15}	

Potencia

$$\Delta V = V_b - V_a > 0$$



En este caso se establece una corriente I a lo largo de la resistencia R.

Si un dq atraviesa la resistencia pierde energía potencial

$$W_{b \to a} = (V_a - V_b)\, dq < 0$$

$$\Delta U = -\, dq\, \Delta V$$

por el contrario cuando atraviesa la pila gana $\Delta U = dq\, \Delta V > 0$

Es decir que en la resistencia pierde o "disipa", $|\Delta U| = \Delta q\, \Delta V \underset{I = \frac{\Delta q}{\Delta t}}{=} I\, \Delta t\, \Delta V$

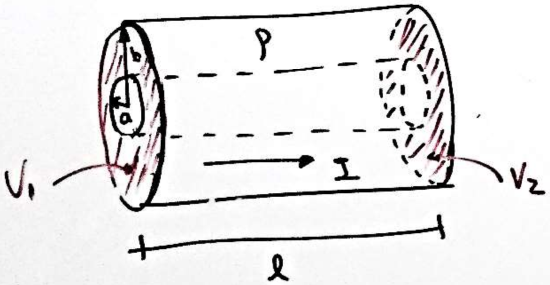
$$\therefore\quad P = \left| \frac{\Delta U}{\Delta t} \right| = \left| \frac{dU}{dt} \right| = I\, \Delta V = \begin{cases} I^2 R \\ \dfrac{\Delta V^2}{R} \end{cases}$$

Ejemplo 1: Tenemos un cable de $l = 3000\ Km$ de Cu, consiste de 7 cables de 0.73 mm de diámetro. Calcular la resistencia. $\rho_{Cu} = 3.10^{-6}\ \Omega cm$

$$\boxed{R = \rho . \frac{l}{S}} = \frac{3\,10^{-6}\ \Omega cm \ \ 3000\ 10^{5}\ cm}{7\ \ \pi\ \frac{0.073^2 cm^2}{4}}$$

$$R = 30.7\ 10^{3}\ \Omega \approx 30\ K\Omega$$

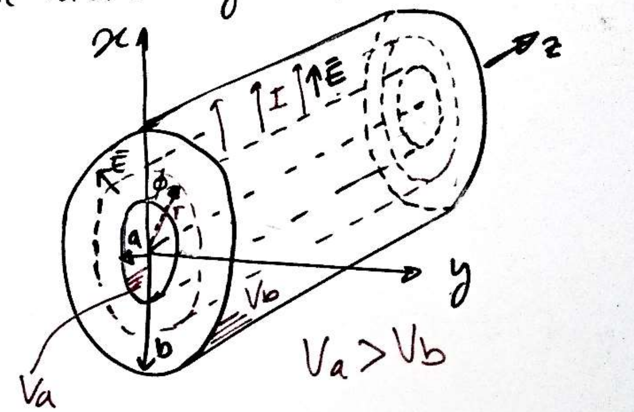
Ejemplo 2: Resistencia de un cilindro hueco



Si se aplica una diferencia de potencial entre ① y ② la resistencia del material resulta:

$$\boxed{R = \rho \frac{l}{S}} = \rho \ \frac{l}{\pi (b^2}$$

Si por el contrario la corriente circula entre la cara interior de radio a y lo exterior de radio b resulta:



$$R = \frac{V_{ab}}{I} =$$

$$= \frac{-\int_a^b \bar{E} . d\bar{l}}{\iint_S \bar{J} . d\bar{s}}$$

recordemos $\boxed{\bar{J} = \sigma \bar{E}} = \frac{1}{\rho} \bar{E}$

$$R = \frac{-\int_a^b \bar{E} . d\bar{l}}{\sigma \iint_S \bar{E} . d\bar{s}}$$

necesitamos conocer $\bar{E}$ en el cilindro. Para eso usamos La place en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 V(r, \phi, z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

como: $\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$

tenemos q' resolver: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$

Integrando obtenemos que,

$$r\frac{\partial V}{\partial r} = C_1 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{C_1}{r}$$

$$\therefore \quad V(r) = C_1 \ln r + C_2$$

poniendo condiciones de contorno,

$V(a) = V$ y

$V(b) = 0$

resulta que $V(r) = V\dfrac{\ln r/b}{\ln a/b}$

A continuación calculamos el $\bar{E}$ usando

$$\bar{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{e}_r$$

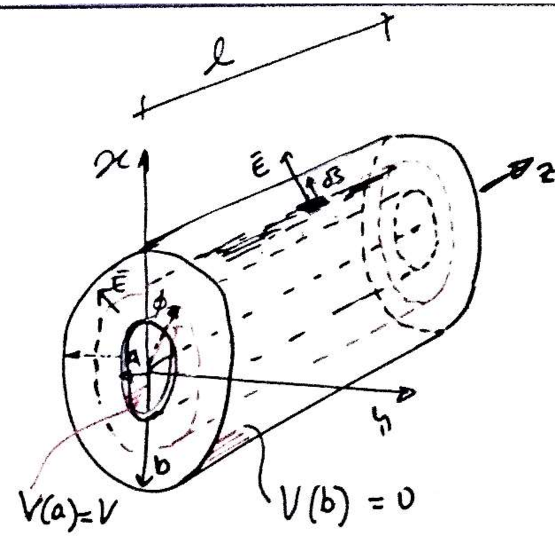
$$\bar{E} = -\frac{V}{r}\frac{\cancel{b}}{\cancel{b}}\frac{1}{\ln a/b}\hat{e}_r = \boxed{\frac{V}{r}\frac{1}{\ln b/a}\hat{e}_r}$$

Si hacemos la integral,

$$\iint_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\int_0^l\int_0^{2\pi}\frac{\cancel{r}}{\cancel{r}}\,d\phi\,dz$$

$ds = r\,d\phi\,dz$

$$\iint_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{V\,2\pi l}{\ln\frac{b}{a}}$$



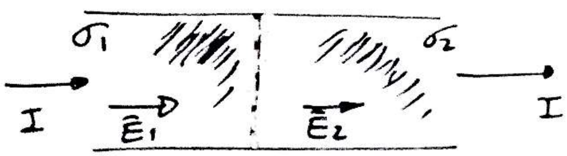
recordemos que

$$R = \frac{\rho\,\Delta V_{ab}}{\iint_S \bar{E}\cdot d\bar{s}} = \frac{\rho\,V\ln b/a}{V\,2\pi l}$$

$$\boxed{R = \frac{\rho\ln b/a}{2\pi l}}$$

Carga eléctrica en una interfase

$\sigma_1 > \sigma_2$



Sabemos que $\quad \bar{J}_1 = \sigma_1 \bar{E}_1$

$\bar{J}_2 = \sigma_2 \bar{E}_2$

Además $\quad I = \iint_S \bar{J}_1 \cdot d\bar{S} = \iint_S \bar{J}_2 \cdot d\bar{S} \Rightarrow$

$$\boxed{\bar{J}_1 = \bar{J}_2}$$

$\therefore \quad \sigma_1 \bar{E}_1 = \sigma_2 \bar{E}_2 \quad$ o $\quad \bar{E}_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \bar{E}_2$

En la interface sigue valiendo la condición de contorno para E, es decir

$$E_2 - E_1 = \frac{\sigma^{int}}{\varepsilon_0}$$

ojo! $\sigma^{int} \neq \sigma_1 . \sigma_2$

$$\frac{I}{A\sigma_2} - \frac{I}{A\sigma_1} = \frac{q_{int}}{A\varepsilon_0}$$

$$\boxed{q_{int} = \varepsilon_0 I \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1}\right)}$$