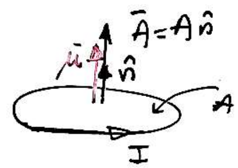
Energía de un dipolo magnético

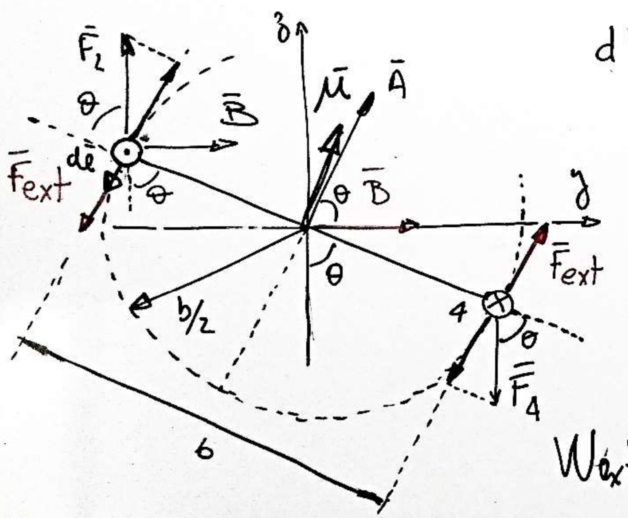
Anteriormente definimos un momento dipolar magnético como $\bar{\mu} = N I \bar{A}$

donde $\bar{A} = A\hat{n}$, siendo A el área de un loop por el q circula una corriente I.



En un campo magnético uniforme $\bar{B}$, el momento dipolar magnético sufre un torque $\bar{\tau} = \bar{\mu} \times \bar{B}$

Veamos el trabajo que necesita realizar un agente externo para hacer rotar el dipolo $\bar{\mu}$



$$dW_{ext} = 2\,\bar{F}_{ext} \cdot d\bar{l} =$$

$$= 2\,|\bar{F}_2|\,\text{sen}\theta\, dl$$

$$= 2\,|\bar{F}_2|\,\text{sen}\theta\,\frac{b}{2}\,d\theta$$

$$= \cancel{2}\,\overbrace{NIBa}^{|\bar{F}_2|}\,\frac{b}{\cancel{2}}\,\text{sen}\theta\, d\theta$$

$$W_{ext} = NIAB \int_{\theta_0}^{\theta} \text{sen}\theta\, d\theta =$$

$$W_{ext} = NIAB \left. -\cos\theta \right|_{\theta_0}^{\theta} =$$

$$W_{ext} = -\underbrace{NIA}_{\mu}B\,(\cos\theta - \cos\theta_0) =$$

Si elegimos $\theta_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta_0 = 0 \Rightarrow$

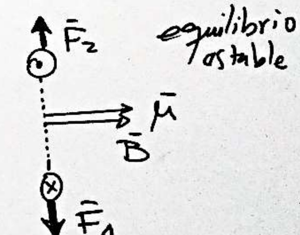
$$W_{ext} = -\mu B \cos\theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Como la variación de la energía potencial es igual al W_{ext} tenemos que,

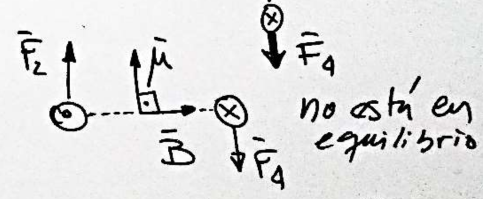
$$\boxed{\Delta U = -\bar{\mu} \cdot \bar{B}}$$

Este resultado nos indica que la mínima energía resulta cuando $\vec{\mu} \parallel \bar{B}$ y $\theta = 0 \Rightarrow$

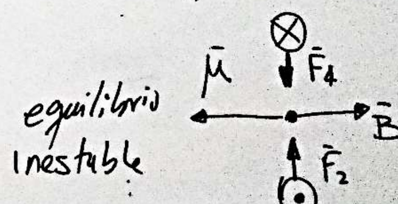
$\theta = 0 \qquad \Delta U = -\mu B$



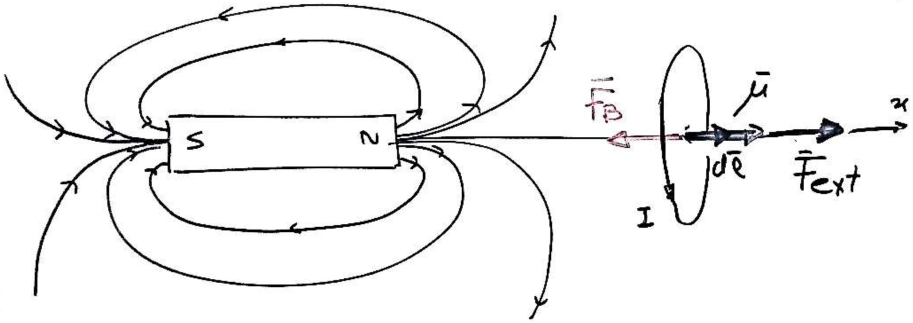
$\theta = \pi/2 \qquad \Delta U = 0$



$\theta = \pi \qquad \Delta U = \mu B$



Fuerza magnética sobre un momento dipolar magnético. Campo magnético "no uniforme"



Supongamos que colocamos un momento dipolar magnético $\bar{\mu}$ en el eje x. De acuerdo al arreglo el imán ejerce una fuerza atractiva sobre $\bar{\mu}$

Si queremos mover $\bar{\mu}$ hacia la derecha, es necesario realizar trabajo,

$$dW_{ext} = \bar{F}_{ext}\cdot d\bar{\ell}$$

$$dW_{ext} = |\bar{F}_{ext}|\, dx = \Delta U$$

$$\Rightarrow \quad |\bar{F}_{ext}|\, dx = U(x+dx) - U(x)$$

$$= -(\vec{\mu}\cdot\vec{B}(x+dx) - \vec{\mu}\cdot\vec{B}(x))$$

$$\Rightarrow |\bar{F}_{ext}| = -\bar{\mu}\cdot\frac{\partial \bar{B}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

En forma vectorial y de manera general

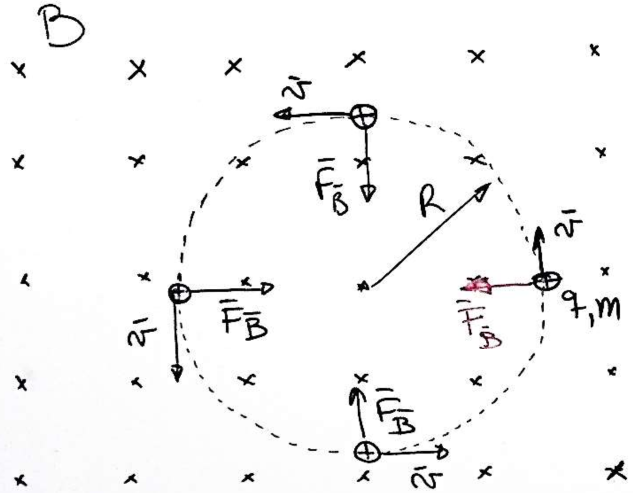
$$\bar{F}_{ext} = \nabla -\bar{\mu}\cdot\vec{B}$$

como $\bar{F}_{\bar{B}} = -\bar{F}_{ext}$ tenemos que

$$\boxed{\bar{F}_{\bar{B}} = \nabla(\vec{\mu}\cdot\vec{B})}$$

Dinámica de una partícula cargada en un campo magnético

Supongamos una partícula de carga $+q$ que se introduce en una región con un campo $\bar{B}$ con una velocidad $\bar{v}$ según el gráfico,



$$\bar{F}_B = q\,\bar{v} \times \bar{B}$$

$$\bar{F}_{\bar{B}} \perp \bar{v}$$

$$\bar{F}_{\bar{B}} \perp \bar{B}$$

Como $\bar{F}_{\bar{B}}$ no puede realizar trabajo, sólo cambia la trayectoria de la partícula, es decir cambia la dirección de la velocidad $\bar{v}$

$\bar{F}_{\bar{B}}$ cumple el rol de una fuerza centrípeta sobre q provocando un movimiento circular en sentido antihorario,

$$\therefore \ |\bar{F}_{\bar{B}}| = \frac{m v^2}{R}$$

reemplazando $|\bar{F}_B| = q\,v\,B$

resulta que

$$q v B = \frac{m v^2}{R}$$

$$\therefore \ \boxed{R = \frac{m v}{q B}}$$

Mientras que el periodo de la órbita resulta:

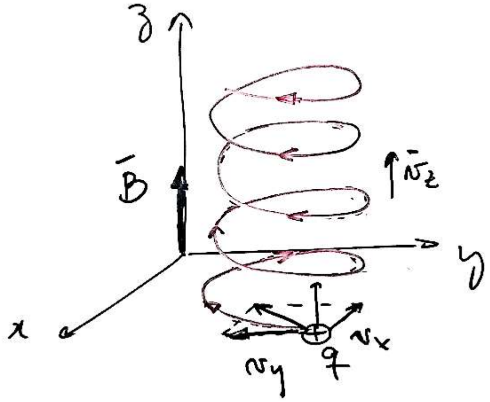
$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{v}\frac{m v}{q B}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi m}{q B}}$$

finalmente,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \boxed{\frac{q B}{m} = \omega_c}$$ frecuencia de sincrotrón

Si la velocidad de la partícula tiene una componente inicial en las tres direcciones v_x, v_y, v_z la trayectoria resulta un helicoide,



$$\bar{B} = B\,\hat{e}_z$$

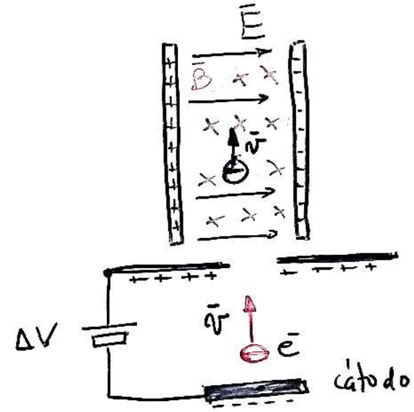
$$\bar{F}_{\bar{B}} = q\,\bar{v}\times\bar{B} = q\,(\bar{v}_x + \bar{v}_y + \bar{v}_z)\times\bar{B}$$

$$= qB\,(v_x\,\hat{e}_x + v_y\,\hat{e}_y)\times\hat{e}_z + qB\,v_z\,\underbrace{\hat{e}_z\times\hat{e}_z}_{0}$$

$$\boxed{\bar{F}_{\bar{B}} = qB\,(-v_x\,\hat{e}_y + v_y\,\hat{e}_x)}$$

La velocidad $\bar{v}_z$ se mantiene constante mientras que se modifica la dirección de la velocidad en el plano x-y.

Selector de velocidades



Entre las placas un ē sufre una fuerza debido al campo eléctrico y al campo magnético.

Las partículas son aceleradas entre el emisor y un slit con una diferencia de potencial ΔV,

$$\Delta U = -e\Delta V = -E_{cin} = -\frac{1}{2} m_e v^2$$

en la entrada de la cámara, la velocidad del ē es:

$$v = \left(\frac{2e\Delta V}{m_e}\right)^{1/2}$$

sólo aquellos ē para los cuales

$$|\bar{F}_{\bar{E}}| = |\bar{F}_{\bar{B}}|$$

tienen una trayectoria recta, es decir que a la salida de la cámara tenemos ē para los cuales

$$eE = evB \Rightarrow \boxed{v = \frac{E}{B}}$$

luego podemos igualar la velocidad

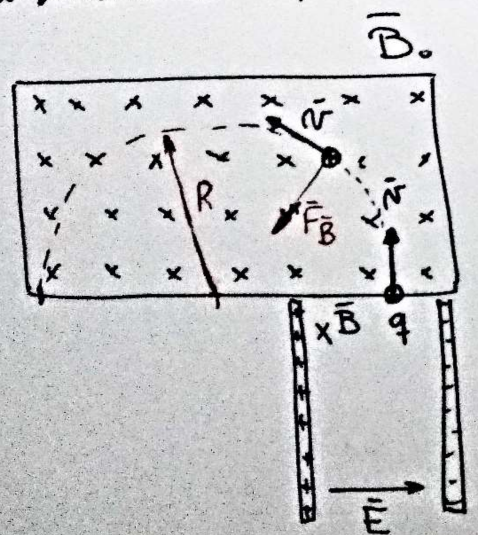
$$\frac{E}{B} = \left(2\frac{e\Delta V}{m_e}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{e}{m_e} = \frac{E^2}{B^2}\frac{1}{2\Delta V}}$$

Esta ecuación plantea un experimento para determinar la relación entre la carga eléctrica y la masa del electrón.

Espectrómetro de masas

La misma idea puede utilizarse para determinar la masa de los átomos. El equipo se denomina espectrómetro de masas.



Las partículas que ingresan a la región con campo $\bar{B}_0$ son iones ($q>0$) que primero pasan por el selector de velocidades

En la región con campo $\bar{B}_0$ describen una trayectoria circular de radio,

$$R = \frac{M^{ion} v}{q B_0}$$

como $v = \frac{E}{B}$ resulta que $R = \frac{M^{ion} E}{q B B_0}$

$$\therefore \boxed{M^{ion} = q\frac{R B B_0}{E}}$$

Ejemplo: Suponer dos iones con carga q y $2q$ y masas M_A y M_B, respectivamente, cuyas trayectorias son de radio R y $2R$. ¿Cuál es la relación de las masas?

Primero pasan por un selector de velocidades por lo que la velocidad v al entrar en la zona de campo B_0 es,

$$v = \left(\frac{2q\Delta V}{M_{ion}}\right)^{1/2}$$

por otro lado el radio de la trayectoria es

$$R = \frac{M^{ion} v}{q B_0} = \frac{M_{ion}}{q B_0}\left(\frac{2q\Delta V}{M_{ion}}\right)^{1/2}$$

$$\therefore \quad R = \frac{1}{B}\left(\frac{2\,\Delta V\, M_{ion}}{q}\right)^{1/2}$$

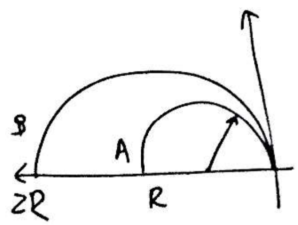
Si hacemos el cociente,

$$\frac{R_A}{R_B} = \left(\frac{M^A_{ion}\, q_B}{q_A\, M^B_{ion}}\right)^{1/2} \underset{\substack{q_A = q \\ q_B = 2q}}{=} \left(2\,\frac{M^A_{ion}}{M^B_{ion}}\right)^{1/2}$$

como $R_A = R_B/2$

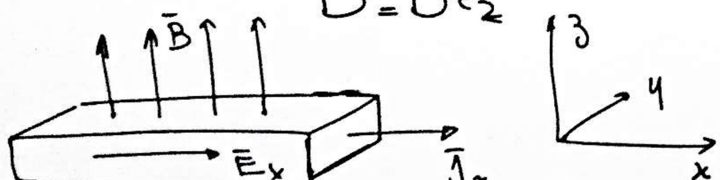
$$\Rightarrow \quad \frac{M^A_{ion}}{M^B_{ion}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{M^B_{ion} = 8\, M^A_{ion}}$$



Efecto Hall

$$\bar{B} = B\,\hat{e}_z$$

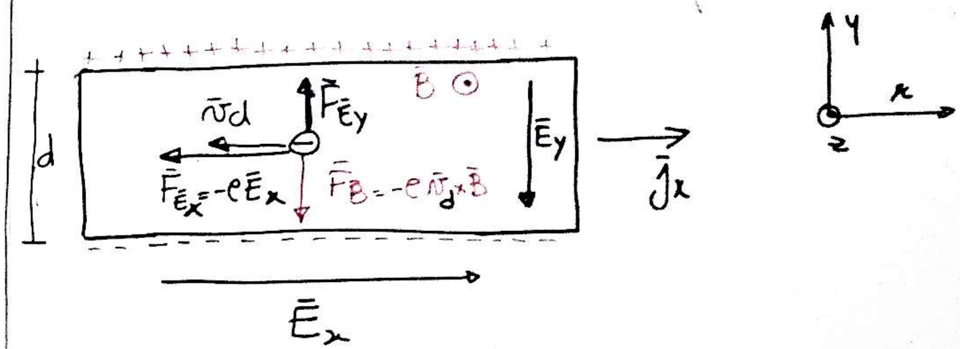


material conductor (σ)

$$\bar{J}_x = \sigma \bar{E}$$

Las cargas eléctricas ($\bar{e}$) q' dan lugar a la corriente sufren la fuerza del campo eléctrico $\bar{E}$ y del campo magnético $\bar{B}$, de manera que,

$$\bar{F}_T = \underbrace{-e\bar{E}}_{\bar{F}_{\bar{E}x}} - \underbrace{e\,\bar{v}\times\bar{B}}_{\bar{F}_B}$$



En equilibrio,

$$\bar{F}_{\bar{E}_y} + \bar{F}_{\bar{B}} = 0 \quad \text{y} \quad \bar{v} = \bar{v}_d$$

$$\Rightarrow \quad -e\bar{E}_y - e\,\bar{v}_d\times\bar{B} = 0$$

$$\bar{E}_y = -\bar{v}_d\times\bar{B}$$

por otro lado ya vimos que

$$\bar{v}_d = -\frac{e\tau}{m_e}\bar{E}$$

Definimos al coeficiente de Hall

$$R_H = \frac{\bar{E}_y}{J_x\, B}$$

Recordemos que

$$\bar{J}_x = q\, n\, \bar{v}_d = -e n \bar{v}_d$$

es decir $$\bar{J}_x = (-e)\frac{n^2 \tau}{m_e}\bar{E}_x = \frac{e^2 n \tau}{m_e}\bar{E}_x$$

o $$J_x = \frac{e^2 n \tau}{m_e} E_x$$

mientras que la componente y del campo eléctrico

$$E_y = -\frac{e\tau}{m_e} E_x B$$

$\bar{E}_y$ está en la dirección $-\hat{e}_y$

$$\Rightarrow \boxed{R_H = -\frac{\cancel{e\tau E_x B}}{\cancel{m_e}\ \frac{e^2 n \cancel{\tau E_x B}}{\cancel{m_e}}} = -\frac{1}{en}}$$

*) Si los portadores de carga son $\bar{e}$ $R_H < 0$

*) Si podemos medir R_H obtenemos un valor experimental para n.

	R_H^{exp}	R_H^{calc}
Na	-2.62	-2.6
K	-4.96	-4.94
Al	$+1.136$	$+1.135$