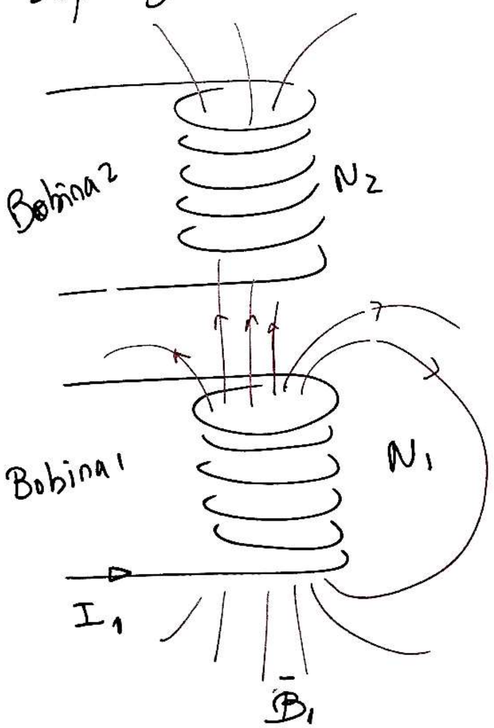
Inductancia mutua y autoinductancia

Inductancia mutua

Supongamos dos bobinas, una cerca de la otra,



la bobina 1 transporta una corriente I_1 y genera un campo $\bar{B}_1$. Parte de $\bar{B}_1$ ingresa a la bobina 2 dando lugar a

ϕ_{21} flujo en la bobina 2 debido a la " 1

Si $I_1(t)$ es función de t, también lo es $\phi_{21}(t)$

es decir existe una fem,

$$\varepsilon_{21} = -N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} = -N_2 \frac{d}{dt}\iint \bar{B}_{21} \cdot d\bar{A}$$

La variación de ϕ_{21} con t es proporcional a la variación de I_1 con el tiempo, es decir que podemos escribir

$$N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} = M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

$B = \mu_0 n I$

donde M_{21} es denominado coeficiente de inductancia mutua y es una cte, luego

$$\boxed{N_2 \phi_{21} = M_{21} I_1} \Rightarrow \boxed{M_{21} = \frac{N_2 \phi_{21}}{I_1}}$$

La unidad para la inductancia mutua es el Henry

$$1\,H = 1\,\frac{T m^2}{A}$$

De la misma manera si hacemos circular una corriente I_2 por la bobina 2, se genera una fem en la bobina 1,

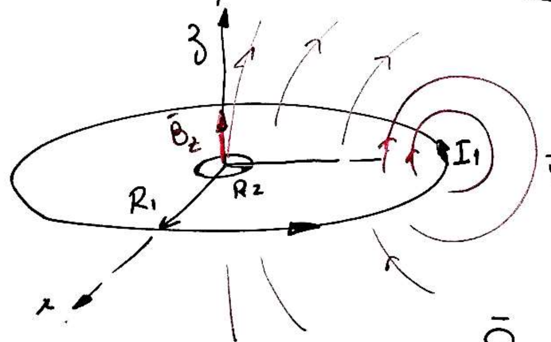
$$\varepsilon_{12} = -N_1 \frac{d\phi_{12}}{dt}$$

donde $N_1 \phi_{12} = M_{12} I_2 \Rightarrow \boxed{M_{12} = \frac{N_1 \phi_{12}}{I_2}}$

Se puede demostrar que entre dos bobinas

$$\boxed{M_{21} = M_{12} = M}$$

Ejemplo: Supongamos dos espiras de radio R_1 y R_2 donde $R_1 \gg R_2$



Si calculamos el campo magnético de una espira circular en el centro de la espira obtenemos

$$\bar{B}_z = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}\hat{e}_z$$

Como suponemos que $R_1 \gg R_2$ aproximamos el campo magnético en la espira 2 como constante, es decir,

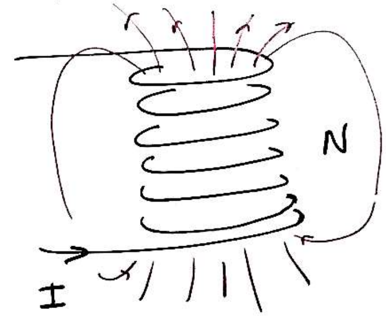
$$\phi_{21} = B_z \pi R_2^2 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}\pi R_2^2$$

Como $$M_{21} = M = \frac{N_2\,\phi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}$$

Como $N_2 = 1$ $$\boxed{M = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}}$$

Podemos ver que M depende sólo de factores geométricos y no depende de I_1 q' circula por la espira de radio R_1.

Autoinductancia



Si la corriente $I = cte \Rightarrow \phi_{\bar{B}} = cte$. Sin embargo si $I(t)$ varía con el tiempo, $\bar{B}$ y por lo tanto $\phi_{\bar{B}}$ varía con el tiempo y de acuerdo con la ley de Faraday se induce una fem en la bobina que tiende a oponerse al cambio, es decir

$$\varepsilon_L = -N\frac{d\phi_{\bar{B}}}{dt}$$

nuevamente

$$\frac{dN\phi_{\bar{B}}}{dt} = L\frac{dI}{dt}$$

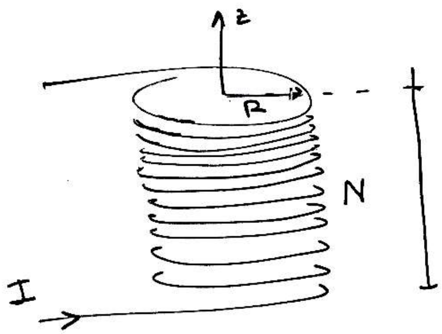
coeficiente de autoinductancia

Si integramos, se obtiene que

$$N\phi_{\bar{B}} = LI \Rightarrow \boxed{L = \frac{N\phi_B}{I}}$$

El coeficiente L es una medida de la resistencia inductiva de la bobina a cambios con el tiempo de la corriente I.

Autoinductancia de un solenoide



Ignorando efecto de borde si $\ell >>$ comparado con R. tenemos que dentro del solenoide,

$$\bar{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \hat{z} = \mu_0 n I \hat{e}_z$$

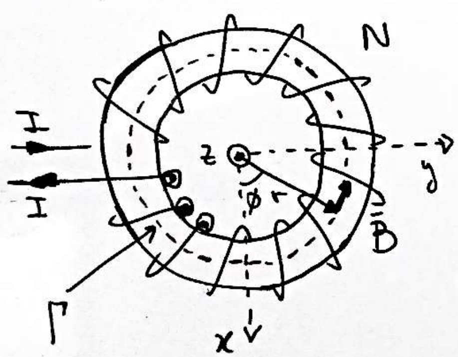
$$\Rightarrow \quad \phi_{\bar{B}} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \pi R^2$$

Como $\quad L = \dfrac{N\phi_B}{I} = \mu_0 \dfrac{N^2 \cancel{I} \pi R^2}{\ell \cancel{I}} \dfrac{\ell}{\ell}$

$$\boxed{L = \mu_0 n^2 \underbrace{\pi R^2 \ell}}$$

sólo aparecen factores geométricos.

Autoinductancia de un toroide

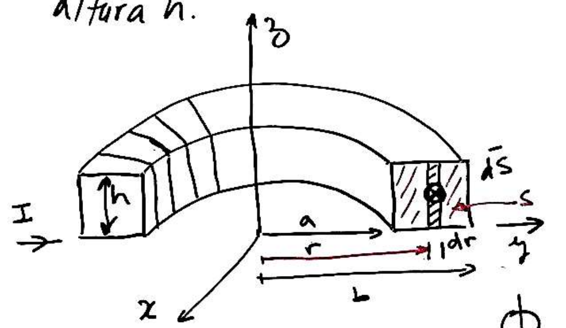


Recordemos que el campo magnético $\bar{B}$ en el interior del toroide puede obtenerse utilizando la ley de Ampere

$$\oint_\Gamma \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 N I$$

$$\Rightarrow \quad \bar{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \hat{e}_\phi$$

En nuestro caso el toroide tiene sección cuadrada, con radio interior a, exterior b y altura h.



$$d\bar{S} = dz\, dr\, \hat{e}_\phi$$

$$\phi_{\bar{B}} = \iint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} \Rightarrow$$

$$\phi_{\bar{B}} = \iint_S \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \hat{e}_\phi \cdot dz\, dr\, \hat{e}_\phi$$

$$\phi_{\bar{B}} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \int_0^h \int_a^b \frac{1}{r}\, dr\, dz$$

$$\phi_{\bar{B}} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

como $\quad N\phi_{\bar{B}} = L I \Rightarrow L = \dfrac{N\phi_{\bar{B}}}{I}$

$$\therefore \quad \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 \cancel{I}}{2\pi \cancel{I}} h \ln \frac{b}{a} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln b/a}$$

en el límite que $a >> b-a$

$$\ln \frac{b}{a} = \ln\left(1 + \frac{(b-a)}{a}\right) \approx \frac{b-a}{a} \Rightarrow L \approx \frac{\ell}{\ell} \frac{\mu_0 N^2 h (b-a)}{2\pi a} \frac{\ell}{\ell}$$

$\ln(1+x) \approx x$

S

S: superficie $h(b-a)$

ℓ: longitud del toroide

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 S \ell}{\ell^2} = \mu_0 n^2 S \ell}$$

Circuitos RL

Autoinductancia y 2da Ley de Kirchoff modificada

Recordemos que la 2da Ley de Kirchoff nos dice que la suma de las diferencias de potencial en un circuito cerrado es nula.

$$\sum_i \Delta V_i = 0$$

este resultado es consecuencia de que en electrostática,

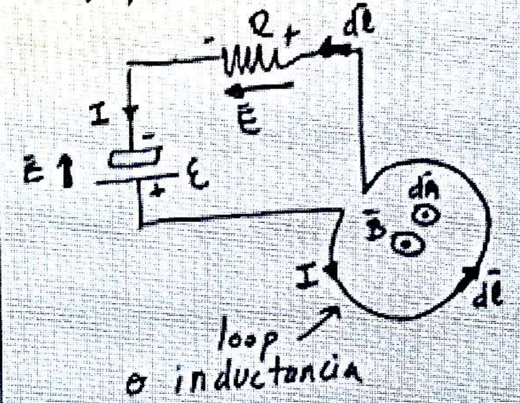
$$\oint_\Gamma \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$$

Sin embargo si tenemos un campo magnético $\bar{B}(t)$ el resultado anterior "deja de ser válido" dado que en este caso,

$$\mathcal{E}_L = \oint_\Gamma \bar{E} \cdot d\bar{l} = -N \frac{d\phi_{\bar{B}}}{dt} = -N \frac{d}{dt} \iint_S \bar{B} \cdot d\bar{s}$$

por lo tanto la aplicación de la 2da Ley de Kirchoff debe ser revisada.

Supongamos el siguiente circuito.



Vamos a calcular $\oint \bar{E} \cdot d\bar{l}$ a lo largo del circuito.

Dentro de la batería, $\bar{E} \cdot d\bar{l} < 0 \Rightarrow$ la contribución es negativa $-\mathcal{E}$, mientras que en R $\bar{E} \cdot d\bar{l} > 0 \Rightarrow$ la contribución es positiva es decir $+IR$. Cuando nos movemos en el loop la resistencia es nula (consideramos un conductor perfecto) $\Rightarrow$ la contribución a la integral es nula, luego

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\mathcal{E} + IR$$

Sin embargo en el loop, la corriente I genera un $\bar{B}$ dando lugar a un flujo magnético $\phi_{\bar{B}}$ en la espira que resulta $\quad d\phi_{\bar{B}} = \bar{B} \cdot d\bar{A} > 0$

como $\quad N\phi_{\bar{B}} = LI \quad$ y además $N=1$

$$\boxed{\phi_{\bar{B}} = LI}$$

$$\phi_B = L I$$

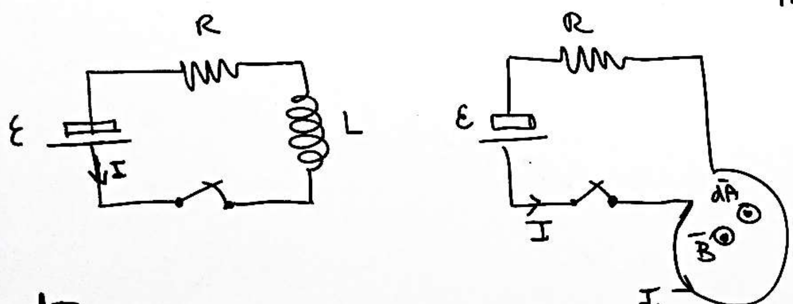
$$\therefore \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\mathcal{E} + IR = -\frac{d\phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

por lo tanto podemos escribir,

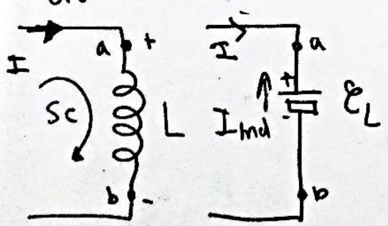
$$-\mathcal{E} + RI + L\frac{dI}{dt} = 0 \quad \text{o}$$

2da Ley de Kirchoff modificada $\boxed{\mathcal{E} - RI - L\frac{dI}{dt} = 0}$

En esta ecuación recuperamos la idea de la 2da ley de Kirchoff. En este caso agregamos una "inductancia" en el circuito responsable de la fem inducida.



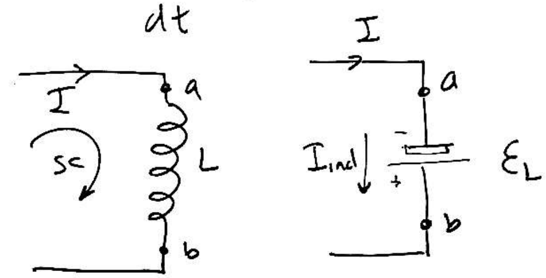
Si $\frac{dI}{dt} > 0$



$$V_b - V_a = \mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt}$$

>0 <0

Si $\frac{dI}{dt} < 0$

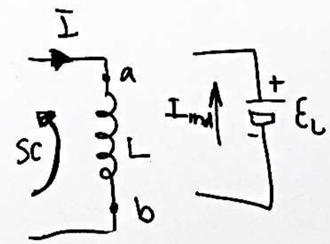


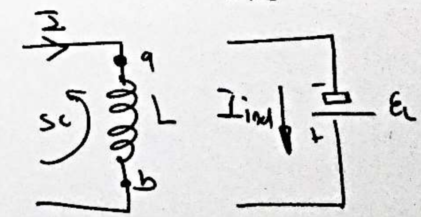
$$V_b - V_a = \mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt}$$

Podemos ver que si la dirección de recorrido de la malla coincide con la dirección de la corriente $\boxed{V_b - V_a = -L\frac{dI}{dt}}$

Por el contrario si la dirección de recorrido de la malla es opuesta a la dirección de la corriente

$$V_a - V_b = -\mathcal{E}_L = L\frac{dI}{dt}$$

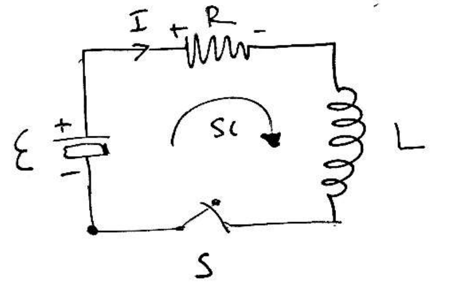




$\frac{dI}{dt} > 0 \quad V_a - V_b > 0$

$\frac{dI}{dt} < 0 \quad V_a - V_b < 0$

Circuito RL: corriente creciente



Cuando cerramos el interruptor $\frac{dI}{dt} > 0 \Rightarrow$ el incremento de corriente se ve afectado por la inductancia L

Si aplicamos la 2da Ley de Kirchoff modificada resulta,

$$\mathcal{E} - IR \overbrace{- L\frac{dI}{dt}}^{\mathcal{E}_L} = 0$$

tenemos una ecuación diferencial y resolvemos por separación de variables,

$$\frac{\mathcal{E}}{R} - I = \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} \Rightarrow I - \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{L}{R}\frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{I - \mathcal{E}/R} = -\frac{R}{L}\,dt$$

Integramos ambos términos de la ecuación

$$\int \frac{dI}{I - \mathcal{E}/R} = -\frac{R}{L}\int dt$$

$$\ln\left(I - \frac{\mathcal{E}}{R}\right) = -\frac{R}{L}t + cte$$

$$I - \frac{\mathcal{E}}{R} = e^{-R/L\,t + cte} = cte^{*}\, e^{-R/L\,t} \qquad cte^{*} = e^{cte}$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} + cte^{*}\, e^{-R/L\,t}$$

Usamos las condiciones iniciales:

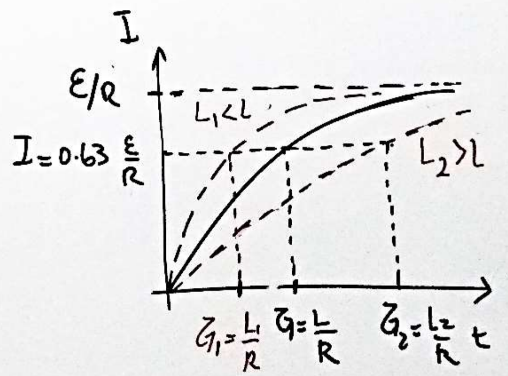
$$I(t=0) = 0$$

$$\Rightarrow I(0) = \frac{\mathcal{E}}{R} + cte^{*} = 0 \Rightarrow cte^{*} = -\frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$\therefore \boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-R/L\,t}\right)}$$

Para este circuito definimos la constante de tiempo, $\tau = \frac{L}{R}$

Si graficamos la curva para $I(t)$ tenemos,



Puede verse que cuanto más grande es L, más tiempo necesita la corriente para alcanzar el valor máximo de $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$

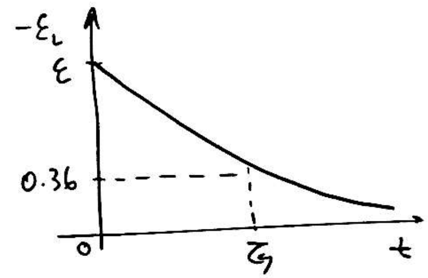
Si graficamos la fem inducida ε_L, tenemos

$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt} = -L\left(-\frac{\varepsilon}{R}\right)\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\varepsilon_L = -\varepsilon\, e^{-R/L\, t}$$

si $t=0$ $\quad \varepsilon_L = -\varepsilon$

si $t\to\infty$ $\quad \varepsilon_L \to 0$



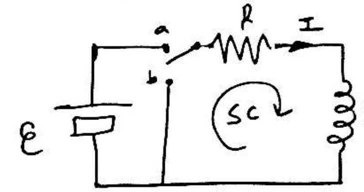
En relación con la energía en este circuito podemos volver a la ecuación:

$$\varepsilon - RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$

$\times I$

$$\underbrace{\varepsilon I}_{\text{energía entregada por la batería}} = \underbrace{RI^2}_{\text{energía disipada x la resistencia}} + \underbrace{LI\frac{dI}{dt}}_{\text{energía almacenada en la inductancia}}$$

Supongamos ahora el siguiente circuito



Inicialmente el interruptor está conectado en el punto a, luego de un tiempo t muy largo donde $I = \frac{\varepsilon}{R}$ se conecta el interruptor en el punto b.

Si aplicamos la 2da Ley de Kirchhoff modificada en la malla con R y L, tenemos

$$-IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

Si resolvemos por separación de variables

$$-\frac{L}{R}\frac{dI}{dt} = I \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt$$

Integrando ambos términos

$$\ln I = -\frac{R}{L}t + cte \qquad e^{cte} = cte^*$$

$$I(t) = cte^*\, e^{-R/L\, t}$$

como $I(t=0) = \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow cte^* = \frac{\varepsilon}{R}$

$$\boxed{I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\, e^{-R/L\, t}}$$

Energía almacenada en un campo magnético

En un circuito, el trabajo que realiza una batería para mover la carga eléctrica es,

$$\frac{dW_{fem}}{dt} = I\,\mathcal{E}$$

Si sólo tenemos la fem y la inductancia,

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = -\mathcal{E}_L = L\frac{dI}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{dW_{fem}}{dt} = I\,L\,\frac{dI}{dt} \qquad (1)$$

Si $\frac{dI}{dt} > 0 \Rightarrow$ el trabajo de la fem es > 0 y almacena energía en la inductancia.

Si $\frac{dI}{dt} < 0$, la batería realiza trabajo negativo provocando q' la energía del inductor disminuye.

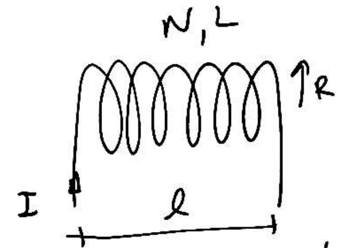
Si integramos la ecuación (1)

$$W_{fem} = L\int_0^I I\,dI$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{fem} = \frac{L}{2} I^2 = U_B}$$

energía magnética almacenada en la inductancia

Caso del solenoide



$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l}\pi R^2$$

$$U_B = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2}{l}\pi R^2 I^2$$

$$\Rightarrow U_B = \frac{1}{2}\frac{\mu_0^2}{\mu_0}\underbrace{\frac{N^2}{l^2}}_{n^2}\pi R^2 I^2 l = \frac{1}{2}\frac{\overbrace{\mu_0^2 n^2 I^2}^{B^2}}{\mu_0}\pi R^2 l$$

$$= \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\underbrace{\pi R^2 l}_{\text{Volumen del solenoide}} \Rightarrow$$

$$\boxed{u_B = \frac{U_B}{Vol} = \frac{1}{2\mu_0}B^2}$$