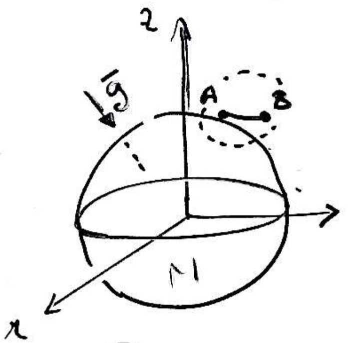
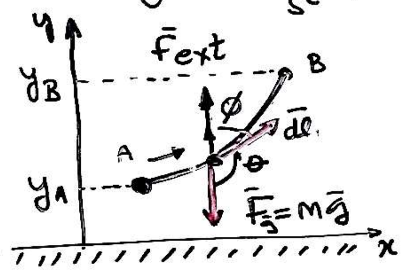
Repaso de trabajo y energía potencial

Veamos el ejemplo de la fuerza gravitatoria cerca de la superficie, donde $\bar{g} = -9.8 \frac{m}{s^2} \hat{e}_r$





Queremos mover un objeto de masa m desde el punto A hasta el punto B.
El trabajo realizado por la gravedad resulta,

$$dW_g = \bar{F}_g \cdot d\bar{l} \rightarrow W_g = \int_A^B \bar{F}_g \cdot d\bar{l}$$

$$W_g = mg \int_A^B \cos\theta \, dl = -mg \int_A^B \underbrace{\cos\phi \, dl}_{dy}$$

$$W_g = -mg \int_A^B dy = -mg\,(y_B - y_A)$$

- por un lado como $y_B > y_A \Rightarrow \boxed{W_g < 0}$
- además se obtiene que el trabajo realizado no depende del camino! sino del punto de partida y de llegada.
- Debido a que W_g no depende del camino decimos que $\bar{F}_g$ es conservativa
- Es decir que

$$\oint \bar{F}_g \cdot d\bar{l} = 0$$

- Para mover el objeto desde A hasta B es necesario considerar un agente externo que ha realizado el trabajo

$$W_{ext} = \int_A^B \bar{F}_{ext} \cdot d\bar{l} = -\int_A^B \bar{F}_g \cdot d\bar{l} = -W_g > 0$$

$$\boxed{W_{ext} > 0}$$

Finalmente para las fuerzas conservativas se introduce el concepto de energía potencial (U) donde,

$$\Delta U = U_{final} - U_{inicial} = -\int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{l} = -W$$

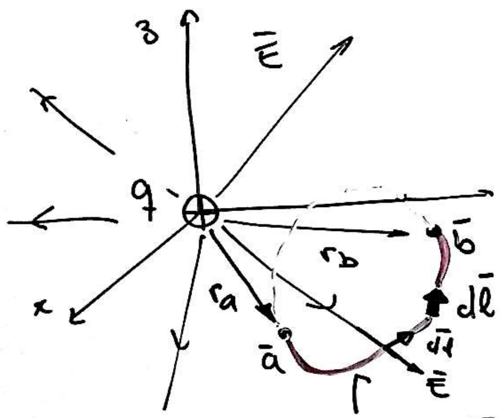
Para nuestro ejemplo $\boxed{\Delta U = -W_g = W_{ext}}$

Potencial eléctrico

Rotor de $\bar{E}$: Caso de una carga puntual

Para una carga puntual

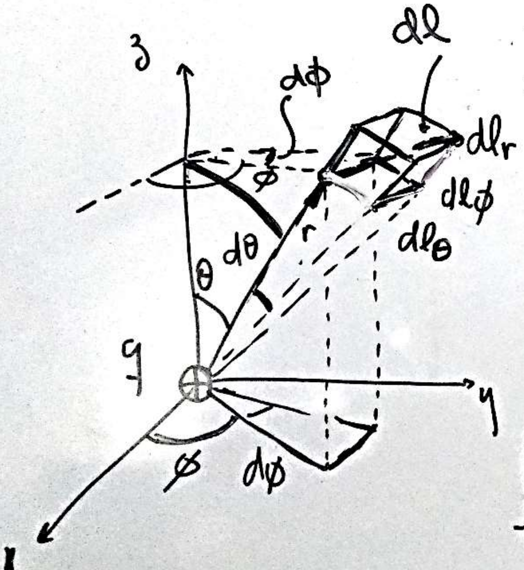
$$\bar{E}(r) = k_e \frac{q}{r^2} \hat{e}_r$$



Si calculamos la integral de línea del campo $\bar{E}$ entre los puntos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ tenemos:

$$I = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

Podemos escribir $d\bar{l}$ en coordenadas esféricas



$$d\bar{l} = dl_r \hat{e}_r + dl_\theta \hat{e}_\theta + dl_\phi \hat{e}_\phi$$

$$d\bar{l} = dr\, \hat{e}_r + r\, d\theta\, \hat{e}_\theta + r \operatorname{sen}\theta\, d\phi\, \hat{e}_\phi$$

Como $\bar{E}$ tiene sólo una componente en $\hat{e}_r$

$$\bar{E} \cdot d\bar{l} = k_e \frac{q}{r^2} dr$$

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \bar{E} \cdot d\bar{l} = k_e q \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \frac{1}{r^2} dr$$

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \bar{E} \cdot d\bar{l} = k_e q \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \frac{1}{r^2} dr = k_e q \left. -\frac{1}{r} \right|_{r_a}^{r_b}$$

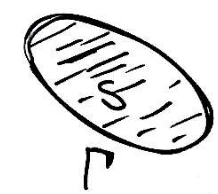
$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \bar{E} \cdot d\bar{l} = k_e q \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

nuevamente la integral "no" depende del camino luego si el punto final coincide con el punto inicial, es decir $\bar{a} = \bar{b}$, tenemos,

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$$

Aquí podemos aplicar el Teorema de Stokes

$$\oint_{\Gamma} \bar{f} \cdot d\bar{l} = \iint_S \nabla \times \bar{f} \cdot d\bar{S}$$



para el caso del campo $\bar{E}$

$$\oint_{\Gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \iint_S \nabla \times \bar{E} \cdot d\bar{S} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \bar{E} = 0}$$

Potencial eléctrico

Rotor de $\bar{E}$

Si bien el resultado,

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0 \quad ; \quad \nabla \times \bar{E} = 0$$

lo probamos para una carga puntual, es válido para cualquier distribución de carga eléctrica estática. En ese caso, usando el principio de superposición,

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \ldots \bar{E}_n$$

$$\therefore \quad \nabla \times \bar{E} = \nabla \times \bar{E}_1 + \nabla \bar{E}_2 + \ldots + \nabla \bar{E}_n = 0$$

Obs: Solo campos vectoriales tal que $\nabla \times \bar{f} = 0$ pueden representar un campo eléctrico.

Por ejemplo: Si decimos que $\bar{E}^* = y\,\hat{e}_x$ y hacemos $\nabla \times \bar{E}^* = -\hat{e}_z \neq 0 \Rightarrow$ no $\exists$ un arreglo de cargas que genere $\bar{E}^*$

Definición del potencial eléctrico

A partir del resultado,

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$$

es decir q' no depende del camino elegido definimos el potencial eléctrico en el punto $\bar{r}$ como,

$$V(\bar{r}) - V(\bar{r}_0) = -\int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

donde $\bar{r}_0$ es un punto de referencia en el espacio, respecto del cual se mide el potencial eléctrico, usualmente $\bar{r}_0$ se ubica en el ∞, donde para cargas puntuales $\bar{E} \to 0$, luego se toma $V(\infty) = 0$, luego para dos puntos $\bar{a}$ y $\bar{b}$,

$$V(\bar{r}_a) - V(\bar{r}_b) = -\int_{\infty}^{\bar{r}_a} \bar{E} \cdot d\bar{l} + \int_{\infty}^{\bar{r}_b} \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

$$= -\int_{\infty}^{\bar{r}_a} \bar{E} \cdot d\bar{l} - \int_{\bar{r}_b}^{\infty} \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\int_{\bar{r}_b}^{\bar{r}_a} \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

es decir,

$$\boxed{V(\bar{r}_a) - V(\bar{r}_b) = -\int_{\bar{r}_b}^{\bar{r}_a} \bar{E} \cdot d\bar{l}}$$

Definición del potencial eléctrico

A partir del teorema del gradiente

$$V(\bar{r}_b) - V(\bar{r}_a) = \int_{\bar{r}_a}^{\bar{r}_b} \nabla V \cdot d\bar{l}$$

Igualando la ecuación anterior con la que se obtuvo a partir de la definición del potencial eléctrico, resulta,

$$-\int_{\bar{r}_a}^{\bar{r}_b} \bar{E}(\bar{r}) \cdot d\bar{l} = \int_{\bar{r}_a}^{\bar{r}_b} \nabla V(\bar{r}) \cdot d\bar{l}$$

$$\therefore \quad \boxed{\bar{E}(\bar{r}) = -\nabla V(\bar{r})}$$

En coordenadas cartesianas:

$$\bar{E}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} V(x,y,z)\,\hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} V(x,y,z)\,\hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} V(x,y,z)\,\hat{e}_z$$

Podemos ver que si conocemos el potencial eléctrico $V(x,y,z)$ es sencillo obtener el campo eléctrico $\bar{E}(x,y,z)$.

Principio de superposición

Si tenemos una distribución de cargas

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \dots + \bar{E}_n$$

la diferencia de potencial entre dos puntos es

$$V(\bar{r}_a) - V(\bar{r}_b) = -\int_{\bar{r}_a}^{\bar{r}_b} (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \dots + \bar{E}_n) \cdot d\bar{l}$$

$$= V_1(\bar{r}_a) - V_1(\bar{r}_b) + V_2(\bar{r}_a) - V_2(\bar{r}_b) + \dots V_n(\bar{r}_a) - V_n(\bar{r}_b)$$

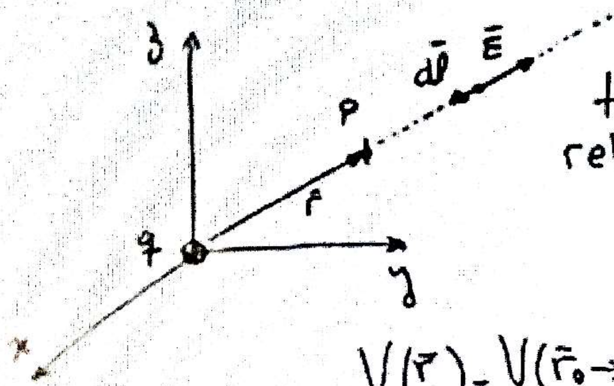
$$= [V_1(\bar{r}_a) + V_2(\bar{r}_a) + \dots + V_n(\bar{r}_a)] - [V_1(\bar{r}_b) + V_2(\bar{r}_b) + \dots + V_n(\bar{r}_b)]$$

Es decir que el principio de superposición es también válido para el potencial eléctrico.

Unidades:

$$\frac{N}{C}\,m = \frac{J}{C} = V \ (\text{Volt})$$

Potencial eléctrico de una distribución de cargas localizada



tomando como referencia al Infinito

$$V(\bar{r}_0 \to \infty) = 0$$

$$V(\bar{r}) - \underbrace{V(\bar{r}_0 \to \infty)}_{=0} = -\int_{\infty}^{\bar{r}} \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

En nuestro caso.

$$\bar{E}(\bar{r}) = k_e \frac{q}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2} \hat{e}_r$$

como $\bar{r}' = 0$ y $|\bar{r}| = r$

$$\bar{E}(\bar{r}) = k_e \frac{q}{r^2} \hat{e}_r$$

por otro lado, si elegimos una trayectoria recta

$$\bar{E} \cdot d\bar{l} = k_e \frac{q}{r^2} dl \underbrace{\cos 180°}_{-1} = -k_e \frac{q}{r^2} dl$$

Sin embargo $dl = -dr$

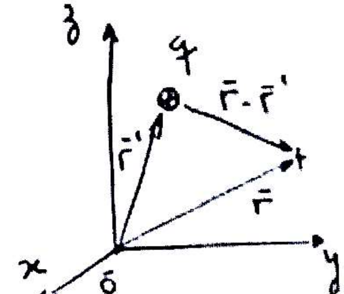
$$V(\bar{r}) = -\int_{\infty}^{r} k_e \frac{q}{r^2} dr = -k_e \frac{q}{r}\Big|_{\infty}^{r} = k_e \frac{q}{r}$$

$$\boxed{V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}}$$

Obs. El potencial eléctrico de una carga positiva es positivo. Lo mismo para una carga eléctrica negativa el potencial eléctrico es negativo

De manera más general si la carga eléctrica no está en el origen:

$$\boxed{V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\bar{r} - \bar{r}'|}}$$



Si tenemos una distribución de cargas puntuales usamos el principio de superposición,

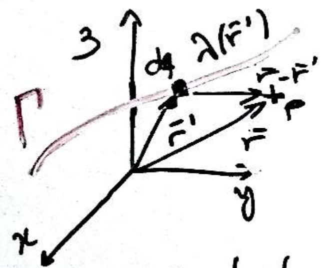
$$V(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{N} V_i(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{N} k_e \frac{q_i}{|\bar{r} - \bar{r}_i|}$$

Si tenemos una distribución continua de cargas eléctricas

$$\sum \longrightarrow \int$$

Potencial eléctrico de una distribución de cargas localizada

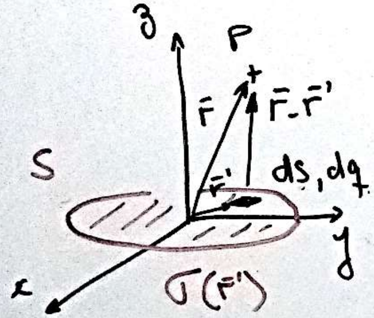
Luego si la distribución es lineal,



$$V(\bar{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Gamma}\overbrace{\frac{\lambda(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}d\ell}^{dq}=\int_{\Gamma}\frac{k_e\lambda}{|\bar{r}-\bar{r}'|}d\ell$$

si $\lambda(\bar{r}')=\lambda=cte$

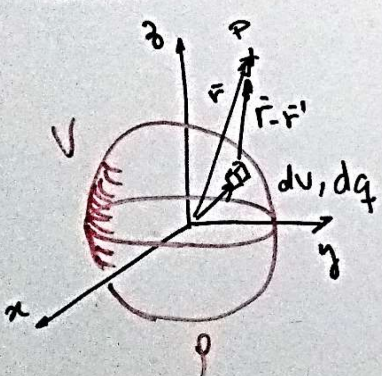
Si la distribución es superficial,



$$V(\bar{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S}\overbrace{\frac{\sigma(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}ds}^{dq}=k_e\iint_{S}\frac{\sigma}{|\bar{r}-\bar{r}'|}ds$$

si $\sigma(\bar{r}')=\sigma=cte$

Finalmente si la distribución es volumétrica,

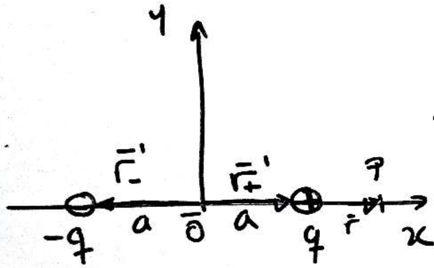


$$V(\bar{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V}\frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}dv=k_e\iiint_{V}\frac{\rho}{|\bar{r}-\bar{r}'|}dv$$

$\rho(\bar{r}')=\rho=cte$

Ejemplos

1) Potencial eléctrico debido a dos cargas de distinto signo sobre el eje x.



Para un punto x sobre el eje x tenemos que:

$$V(x) = k_e \left(\frac{q}{|\bar{r} - \bar{r}'_+|} - \frac{q}{|\bar{r} - \bar{r}'_-|} \right)$$

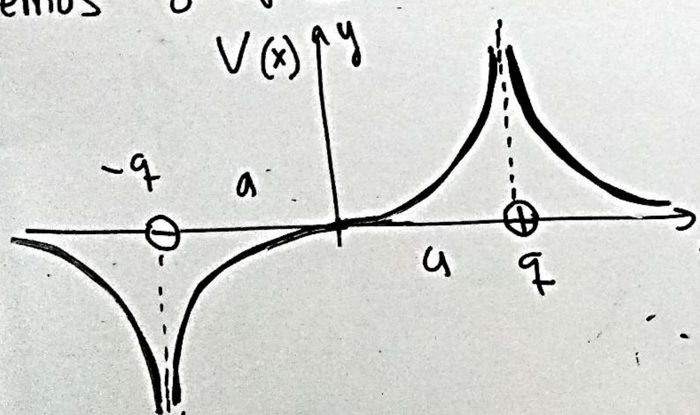
como $\bar{r}'_+ = a\hat{e}_x$; $\bar{r}'_- = -a\hat{e}_x$ y $\bar{r} = x\hat{e}_x$

$$|\bar{r} - \bar{r}'_+| = |x - a|$$

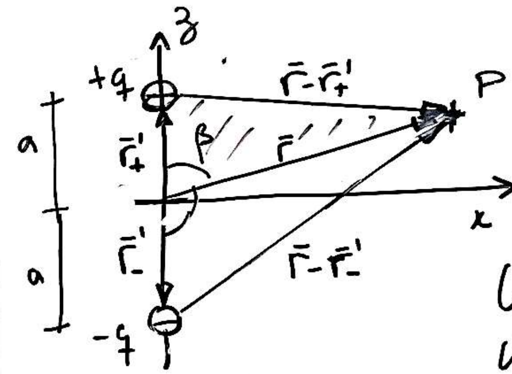
$$|\bar{r} - \bar{r}'_-| = |x + a|$$

$$\boxed{V(x) = k_e q \left[\frac{1}{|x-a|} - \frac{1}{|x+a|} \right]}$$

Podemos graficar $V(x)$:



Potencial eléctrico en todo el espacio



Utilizamos el principio de superposición

$$V(\bar{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'_+|} - \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'_-|} \right]$$

donde $\bar{r}'_+ = a\hat{e}_z$ y $\bar{r}'_- = -a\hat{e}_z$

Para describir el módulo de $|\bar{r} - \bar{r}'_+|$ y $|\bar{r} - \bar{r}'_-|$ recurrimos al teorema del coseno,

$$|\bar{r} - \bar{r}'_+| = (a^2 + r^2 - 2ra\cos\beta)^{1/2}$$

$$|\bar{r} - \bar{r}'_-| = (a^2 + r^2 + 2ra\cos\beta)^{1/2}$$

Vamos a considerar el caso donde $r \gg a$

$$|\bar{r} - \bar{r}'_+| = r\left(1 - 2\frac{a}{r}\cos\beta + \cancel{\frac{a^2}{r^2}}\right)^{1/2} \approx r - a\cos\beta$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$|\bar{r} - \bar{r}'_-| = r\left(1 + 2\frac{a}{r}\cos\beta + \cancel{\frac{a^2}{r^2}}\right)^{1/2} \approx r + a\cos\beta$$

reemplazando en $V(\bar{r})$ tenemos

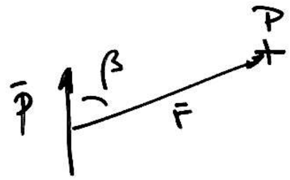
$$V(\bar{r}) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r-a\cos\beta}-\frac{1}{r+a\cos\beta}\right)=$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r+a\cos\beta-r+a\cos\beta}{r^2-a^2\cos^2\beta}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\cos\beta}{r^2\left(1-\cancel{\frac{a^2\cos^2\beta}{r^2}}\right)}$$

$$V(\bar{r})\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\cos\beta}{r^2}=\boxed{\frac{p\cos\beta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \qquad \beta=\theta$$

donde $|\bar{p}|=2qa$

$$\therefore\ \boxed{V(\bar{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\bar{p}\cdot\bar{r}}{|\bar{r}|^3}}$$



A partir de este resultado podemos calcular el $\bar{E}$ usando que $\bar{E}=-\nabla V$

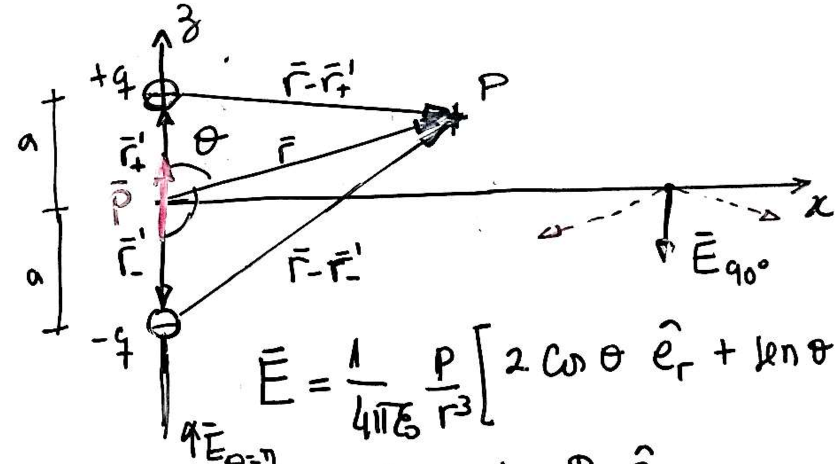
En coordenadas esféricas,

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial r}\hat{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{e}_\theta+\frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{e}_\phi$$

en este problema el ángulo β corresponde al ángulo θ de las coordenadas esféricas, es decir $\beta\to\theta$;

$$\bar{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}\hat{e}_r+\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\text{sen}\,\theta}{r^3}\hat{e}_\theta$$

Potencial eléctrico en todo el espacio



$$\bar{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\left[2\cos\theta\,\hat{e}_r+\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_\theta\right]$$

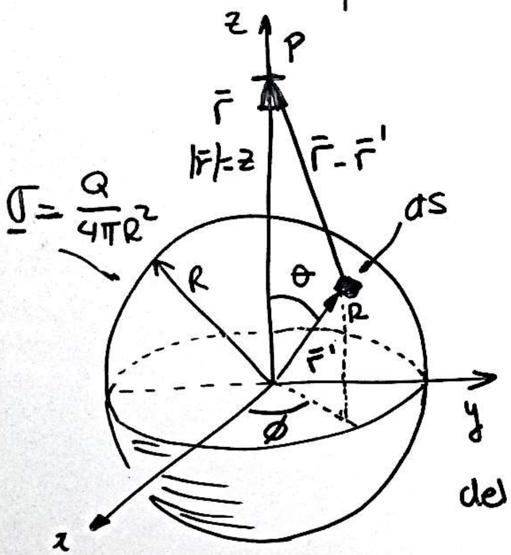
si $\theta=90°$ $\quad \bar{E}_{90°}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\hat{e}_\theta$

$r\gg a$

si $\theta=0$ $\quad \bar{E}_{0°}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\hat{e}_r$

si $\theta=\pi$ $\quad \bar{E}_{\pi}=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\hat{e}_r$

Ejemplo: Potencial eléctrico de un casquete esférico cargado de radio R



En este caso podemos elegir como referencia,

$$\underline{V(\infty) = 0} \quad \therefore$$

$$V(\bar r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \overbrace{\sigma \frac{1}{|\bar r - \bar r'|} ds}^{dq = \sigma ds}$$

nuevamente usamos el teorema del coseno,

$$|\bar r - \bar r'| = \left(z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta\right)^{1/2}$$

$$ds = R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$V(z) = k_e \sigma \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} \frac{R^2 \operatorname{sen}\theta}{\left(z^2+R^2-2zR\cos\theta\right)^{1/2}} d\theta\, d\phi$$

llamamos $a = z^2 + R^2$

$u = -2zR\cos\theta$

$du = +2zR \operatorname{sen}\theta \, d\theta$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \dfrac{1}{2zR} du$

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma R^2 2\pi}{2zR} \int_{-2zR}^{2zR} \frac{1}{(a+u)^{1/2}} du$$

$$= \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0} \frac{1}{z} \, 2(a+u)^{1/2} \Big|_{-2zR}^{2zR} =$$

$$= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \frac{1}{z} \left[\left(z^2+R^2+2zR\right)^{1/2} - \left(z^2+R^2-2zR\right)^{1/2} \right]$$

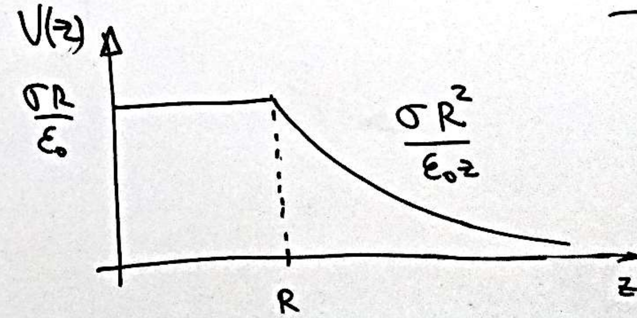
$$\boxed{V(z) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z} \left[\sqrt{(R+z)^2} - \sqrt{(R-z)^2} \right]}$$

Si $z > R$ (fuera de la esfera)

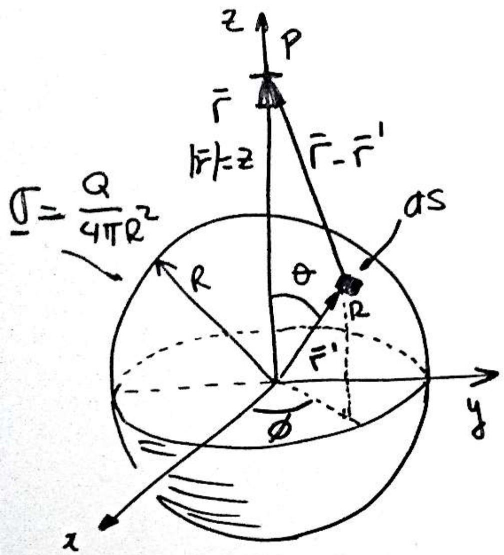
$$\boxed{V(z) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z} \left[(R+z) - (z-R) \right] = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 z} = \frac{Q}{4\pi \cancel{R^2}} \frac{\cancel{R^2}}{\varepsilon_0 z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{z}}$$

Si $z < R$ (dentro de la esfera

$$\boxed{V(z) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z} \left[(R+z) - (R-z) \right] = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi R^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{R}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}}$$



Para calcular el campo eléctrico usamos



$$\bar{E} = -\nabla V$$

Recordemos que en coordenadas esféricas,

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{e}_\phi$$

En este caso a z lo denominamos r

$$z \longrightarrow r$$

Luego para

$$z > R \quad V(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} \Rightarrow \bar{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{e}_r$$

$$z < R \quad V(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \Rightarrow \bar{E} = 0$$