GUIA 0: Herramientas de Física y Matemática

Problema 1

Dadas dos partículas en el espacio ubicadas en los puntos de coordenadas $p_1 = (0, 5, -2)$ y $p_2 = (2, 3, 1)$. Hallar el vector posición de la partícula 1 respecto de la partícula 2 (o sea $\mathbf{R_{12}}$), y el vector posición de la partícula 2 respecto de la partícula 1 (o sea $\mathbf{R_{21}}$).

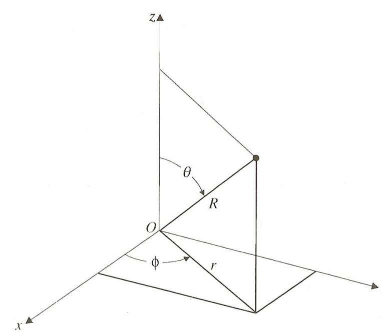
a) Determinar el módulo de dichos vectores y el vector unitario (versor) correspondiente.

b) Grafique los puntos y los vectores posición citados.

Problema 2

Escribir las ecuaciones de transformación que permiten describir la posición del punto P en coordenadas cartesianas (x, y, z) a partir de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y esféricas (r, θ, ϕ).

Nota: La definición de ángulos serán θ: ángulo polar o colatitud (0° a 180°) y ϕ: ángulo azimulal (0° a 360°)



Problema 3

Calcular los factores de escala o coeficientes métricos $h_i = \left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|$ para distintos sistemas de coordenadas ortogonales (cartesianos $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$, cilíndricos $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, z)$ y esféricos $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \phi)$ y determinar:

a) El diferencial de longitud vectorial $d\vec{l}$ para los tres sistemas de coordenadas.

b) El vector diferencial de superficie $d\vec{S}$ para los tres planos determinados por el sistema de ejes cartesianos. ¿Cómo sería para planos de ejes de simetría cilíndrica?¿es indistinto el orden en el que se realiza el producto vectorial?

c) El diferencial de volumen dV para los tres sistemas de coordenadas.

Problema 4

Utilizando los diferenciales adecuados, obtener a través del cálculo integral:

a) El perímetro de un círculo.

b) El área de un anillo de radio interno Ra y radio externo Rb *c)* El área de una esfera.

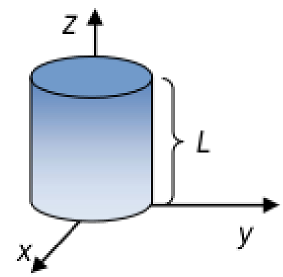
d) El volumen de una esfera.

Problema 5

Teniendo un cilindro ubicado tal cual se muestra en la figura,

a) ¿Cuál es la masa de cuerpo cilíndrico de plomo de 1 cm de radio y 10 cm de alto? (densidad del Pb:11340 kg/m^3)

b) Un recipiente cilíndrico de radio R y altura L contiene un líquido cuya densidad varía linealmente con la altura $\rho(z) = A.z$ (A en gr/cm^4) como se muestra en la figura ¿Cuál será la masa total del líquido contenido en el recipiente?



Problema 6

Suponiendo que una nube de electrones confinada en una región entre dos esferas concéntricas de 2 cm y 5 cm de radio, tiene una densidad de carga de $\frac{-3\times 10^{-8}}{r^4}\cos^2(\phi)$ (C/m^3) encuentre la carga total contenida en la región.

Problema 7

Calcular el gradiente negativo ($\mathbf{F} = -\nabla V$) de las siguientes ecuaciones escalares:

a) $V(x,y) = V_0\, e^{-x}\sin\left(\frac{\pi y}{4}\right)$.

b) $V(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$.

c) $V(x,y,z) = x^2 y^3 z^4$.

d) $V(x,y,z) = e^x \sin(y)\ln(z)$.

e) $V(r,\phi) = V_0\, r\cos(\phi)$.

Problema 8

El vector normal unitario a la superficie se define como: $\vec{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Encuentre $\vec{n}$ para el elipsoide $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$.

Problema 9

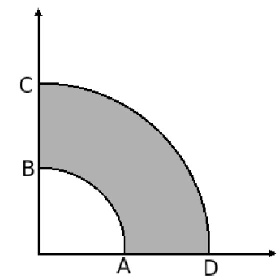
Sea $\vec{\mathbf{r}}$ el vector que une dos puntos fijos, de (x', y', z') a (x, y, z) y r su longitud. Mostrar que,

a) $\nabla(r^2) = 2\,\vec{\mathbf{r}}$.

b) $\nabla(1/r) = -\check{\mathbf{r}}/r^2$.

Problema 10

Suponga una función vectorial $\mathbf{F}(r,\theta) = 5r\sin(\theta)\ \breve{e}_r + r^2\cos(\theta)\ \breve{e}_\theta$,



a) Calcule $\oint \vec{\mathbf{F}}.d\vec{l}$ a lo largo del contorno ABCDA en la dirección indicada en la figura.

b) Calcule $\nabla \times \mathbf{F}$.

c) Calcule $\oint (\nabla \times \vec{\mathbf{F}}).d\vec{S}$ sobre el área sombreada y compare el resultado con el que obtuvo en *a)*

Problema 11

Calcular el flujo del campo $\mathbf{B}(x,y,z) = 2\ \breve{i} + 0\ \breve{j} + 0\ \breve{k}$ a través de un cuadrado de lado 5 ubicado:

a) en forma perpendidular al eje x.

b) en forma perpendidular al eje z.

Problema 12

Hallar el flujo del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = 4xz\ \breve{i} - y^2\ \breve{j} + yz\ \breve{k}$ a través de la superficie S del cubo limitado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ y $z = 1$:

a) calculando la integral de superficie $\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}}.d\vec{S}$.

b) haciendo uso del teorema de la divergencia de Gauss.

Problema 13

Calcular el flujo del campo $\mathbf{B}(r,\theta,\phi) = \dfrac{1}{r^2}\ \breve{e}_r$ sobre una esfera de radio R centrada en el origen.

a) ¿Cómo varía el flujo a través de la esfera a medida que el radio R aumenta?

b) ¿Es válida esta afirmación si el campo fuera de la forma $1/r$?

c) ¿Este resultado contradice el teorema de la divergencia?

Problema 14

Es $\nabla \times \mathbf{F}$ necesariamente perpendicular a $\mathbf{F}$ para cualquier función vectorial $\mathbf{F}$? Justifique su respuesta.

Problema 15

Verifique la identidad $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla.\mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$ en coordenadas rectangulares, donde en estas coordenadas tiene la forma definida en el texto

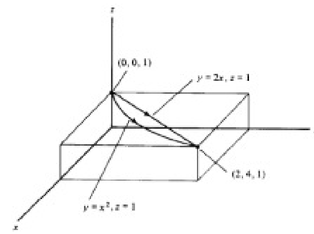
Problema 16

Calcular el Laplaciano de la función escalar $f(x) = x^4 z - 3xy - xyz$.

Problema 17

Dados los campos de fuerza:

$\mathbf{F}(x, y, z) = 2y\ \breve{i} + 2x\ \breve{j} + z\ \breve{k}$, $\qquad$ $\mathbf{G}(x, y, z) = 3xy\ \breve{i} - 5z\ \breve{j} + 10x\ \breve{k}$.



a) Calcular el trabajo realizado por cada uno de ellos al mover un objeto desde un punto $(0, 0, 1)$ hasta el punto $(2, 4, 1)$ a través de los siguientes caminos:

   i) C_1 : $y = x^2$, $z = 1$;

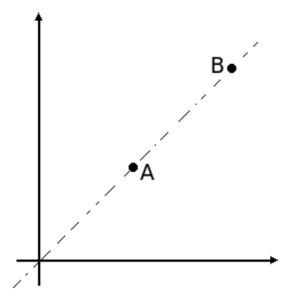
   ii) C_2 : $y = 2x$, $z = 1$.

b) Hallar el rotor de cada uno de los campos.

c) Determinar cuál de estos campos es conservativo y hallar la función potencial correspondiente.

Problema 18

Una partícula de masa m, cuando es liberada en el punto A experimenta una fuerza que la mueve $\mathbf{F} = \dfrac{C}{r^2}\ \breve{e}_r$ hacia el punto B.



a) Calcular el trabajo que realiza la fuerza sobre la partícula cuando recorre la distancia $|\mathbf{r_b} - \mathbf{r_a}|$.

b) Determinar la velocidad de la partícula al llegar al punto B (*ayuda*: tome en consideración el *Teorema de las Fuerzas Vivas*).

Problema 19

Dados los campos escalares

a) $f(x, y, z = x^2 y + xyz$.

b) $f(r) = \dfrac{1}{r}$.

Hallar el gradiente y el rotor del gradiente de cada uno de ellos. ¿Considera que es casual el resultado que ha obtenido para el cálculo del rotor?

Problema 20

Calcule el desarrollo en serie de Taylor para $x = 0$ de la función $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^{1/2}}$ y de la función $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$.

Problema 21

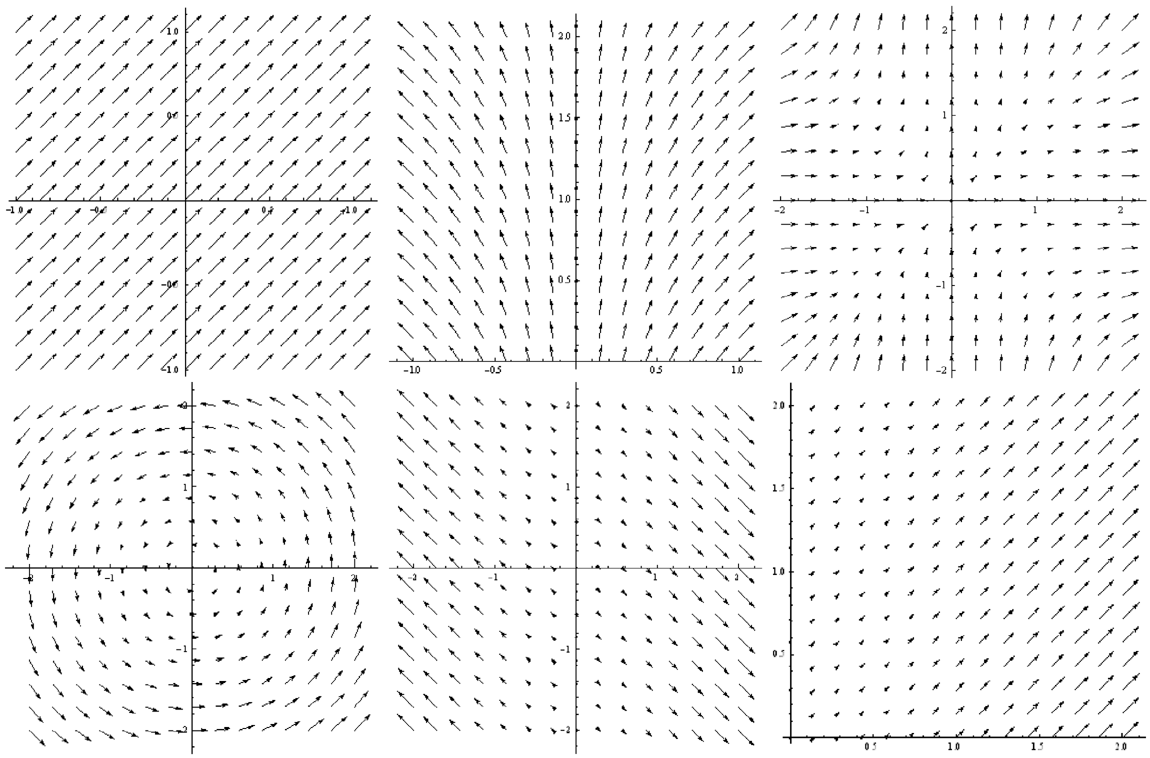
Compruebe el *Teorema de la Divergencia* para la función $\mathbf{f}(x, y, z) = xy\ \breve{\imath} + 2yz\ \breve{\jmath} + 3xz\ \breve{k}$. Tome como volumen el cubo de lado 2 con un vértice en el origen del sistema de coordenadas.

Problema 22

Compruebe el *Teorema de Stokes* para la función $\mathbf{f}(x, y, z) = xy\ \breve{\imath} + 2yz\ \breve{\jmath} + 3xz\ \breve{k}$, usando el triángulo formado por área con vértices: $a = (0, 0, 0)$, $b = (0, 2, 0)$ y $c = (0, 0, 2)$.

Problema 23

Estudie la divergencia y la circulación (rotación) en diferentes puntos de las siguientes figuras:



Problema 24

Se realiza una medición indirecta de una dada magnitud física. Los valores obtenidos con la calculadora son x y ξ para el cálculo de la medida y para el cálculo de la incerteza respectivamente. Exprese correctamente el resultado de la medición escribiendo el error con una sola cifra significativa.

a) $x = 453 \quad \xi = 0.51$

b) $x = 0.0237 \quad \xi = 0.01$

c) $x = 56.789 \quad \xi = 0.138$