GUIA 2: LEY DE GAUSS, ECUACIÓN DE LAPLACE y MÉTODO DE IMÁGENES

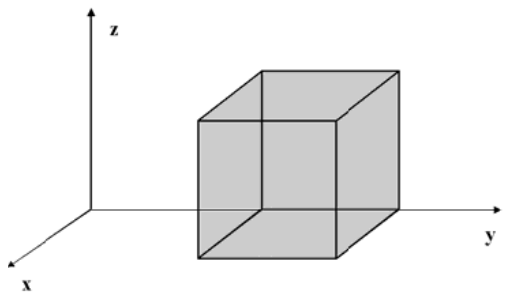
Problema 1

Dado un campo eléctrico uniforme de intensidad E = $6.2\text{x}10^5$N/C y una superficie plana con un área de 3.2m^2 que puede orientarse de distintas formas, calcular el flujo a través del área cuándo la dirección del campo eléctrico es

a) Perpendicular a la superficie.
b) Paralela a la superficie.
c) Forma un ángulo de 75° con el plano de la superficie.

Problema 2

Un campo eléctrico del tipo $\vec{E} = a\sqrt{x}\hat{i} + a\sqrt{y}\hat{j} + a\sqrt{z}\hat{k}$ con a = 800 N/Cm$^{1/2}$ intersecta una de las caras de un cubo de 10cm de arista ubicado como se muestra la figura, donde sobre el eje y las caras cortan en $y = b$ e $y = b$+10cm.



Calcular:

a) El flujo neto que pasa por el cubo.
b) La carga dentro del cubo.

Problema 3

Suponiendo que una carga positiva está *uniformemente distribuida en un volumen esférico* de radio R, siendo ρ la carga por unidad de volumen.

a) Por medio del Teorema de Gauss obtener una expresión para el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera y graficarlo como función de la distancia al centro de la esfera (*r*).
b) Obtener el potencial dentro y fuera de la esfera y graficarlo como función de *r*.

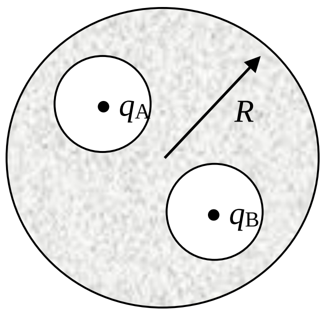
Problema 4

Suponer una distribución de carga esférica **no uniforme** de forma $\rho(r) = A/r$ para r≤R y $\rho = 0$ para r>R.

a) Por medio del Teorema de Gauss obtener una expresión para el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera y graficarlo como función de la distancia al centro de la esfera (*r*).
b) Obtener el potencial dentro y fuera de la esfera y graficarlo como función de *r*.

Problema 5

En un conductor esférico neutro de radio *R* se efectúan dos cavidades esféricas de radios *a* y *b* como indica la figura. En el centro de cada cavidad se coloca una carga puntual q_A y q_B.



a) Encontrar las densidades de cargas superficiales σ_A y σ_B.
b) ¿Cuál es el campo fuera del conductor esférico?
c) ¿Cuál es el campo dentro de cada cavidad?
d) ¿Cuál es el campo en el interior del conductor? (zona gris).

Problema 6

De una superficie esférica salen líneas de fuerza radialmente y sobre ella tienen una densidad constante. ¿Cuáles son las posibles distribuciones de carga en su interior?

Problema 7

¿Por qué no es práctico usar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico en un punto que está a una distancia *b* de una barra cargada cuya longitud es *L*, a menos que *L*>>*b*?

Problema 8

Considerar un dipolo eléctrico en el límite $l<<r$ y **mostrar** que el flujo del $\vec{E}$ a través de una superficie Gaussiana esférica es cero (lo cual es consistente con el hecho que la carga encerrada por la superficie Gaussiana es cero también).

Problema 9

a) Si *V* es cero en un punto, también ***E*** debe ser cero en el punto? Justificar y dar ejemplos.
b) ¿Qué puede decirse respecto a ***E*** en una región donde *V* es constante?
c) ¿Se tiene una carga neta positiva encerrada dentro de una superficie Gaussiana, significa que el campo eléctrico está dirigido hacia afuera de la superficie en todos los puntos? Justificar la respuesta.

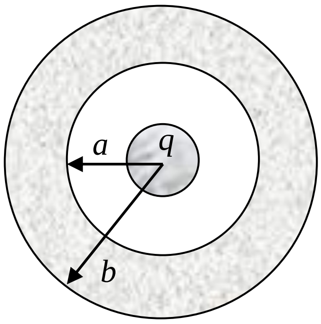
Problema 10

La carga máxima que puede ser retenida por uno de los bornes esféricos de un generador de Van der Graaff es alrededor de 10^{-3}C. Suponiendo una carga positiva con este valor y distribuida uniformemente sobre la superficie de una esfera que se encuentra en el vacío:

a) Calcular el valor del campo eléctrico en un punto exterior a la esfera y situado a 5m de su centro.
b) Si se abandonara un electrón en este punto, ¿cuál sería el valor y la dirección de su aceleración inicial?

Problema 11

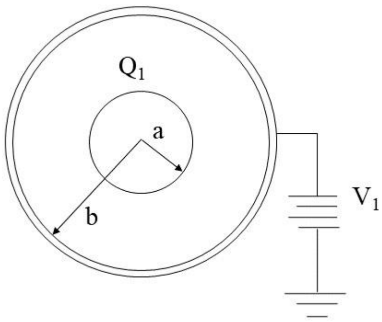
Una esfera metálica de radio *R* y carga *q* está rodeada por una capa metálica neutra de radio interior *a* y radio exterior *b*.



a) Encontrar la densidad superficial de carga σ en las superficies de radio *R, a* y *b*.
b) Calcular y graficar el campo eléctrico en las distintas regiones.
c) Calcular y graficar el potencial en las distintas regiones.
d) Repetir los incisos anteriores si ahora la superficie exterior es tocada con un cable puesto a tierra que baja su potencial a cero.

Problema 12

Un conductor esférico de radio *a* con carga Q_1 se encuentra en el interior de una esfera conductora hueca de radio *b* y espesor *e*, tal como se indica en la figura. La esfera de radio mayor se encuentra a un potencial V_1 gracias a una batería.



a) Calcular la carga total sobre la superficie exterior de la esfera hueca y sobre la superficie interior.
b) Hallar la expresión del campo y el potencial a una distancia *r* del centro de las esferas, siendo r<a; a<r<b, b<r<b+e y finalmente r>b+e.
c) Graficar V(r) y E(r).

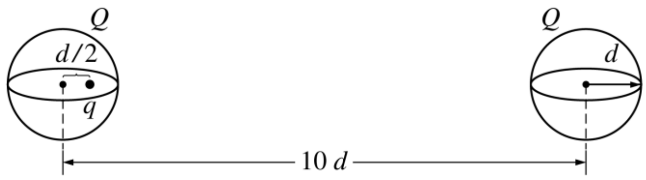
Problema 13

Determinar la expresión de campo eléctrico entre dos láminas planas e infinitas, cargadas con cargas iguales y de signo opuesto, las cuales se encuentran separadas una distancia *a* entre ellas. Comparar el resultado obtenido con la expresión de campo hallada en el problema 17 de la guía 1.

Problema 14

Dos cascarones esféricos no conductores, de radio *d y* muy delgados, tienen cada uno una carga Q distribuida uniformemente y se ubican de forma que sus centros queden separados una distancia *10d*. Se coloca una carga puntual positiva de magnitud *q* a una distancia *d/2* del centro de uno de los cascarones, tal como se indica en la figura.

a) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la carga *q*?
b) ¿Cuál hubiera sido la fuerza neta sobre la carga q si la carga Q e la izquierda hubiera estado distribuida de modo que ρ fuera constante?



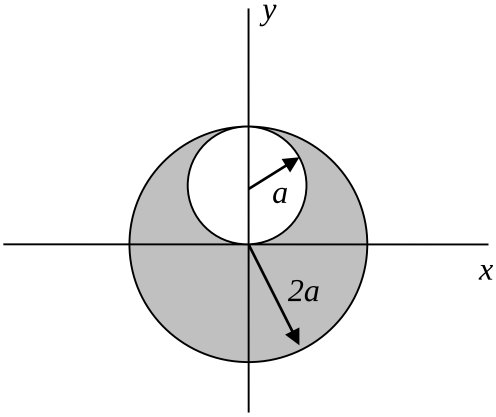
(Ayuda: utilice principio de superposición)

Problema 15

Una esfera de radio 2*a* está hecha de un material no conductor con una densidad de carga volumétrica uniforme ρ. Se efectúa una cavidad de radio *a* en la esfera, como se muestra en la figura.

Demuestre que el campo eléctrico dentro de la cavidad es uniforme y está dado por $E_x = 0$ y $E_y = \rho\, a/(3\, \varepsilon_0)$.

(*Sugerencia: el campo en el interior de la cavidad es la superposición del campo eléctrico debido a la esfera original sin la perforación más el campo debido a unas esfera del tamaño de la cavidad con una densidad de carga uniforme* -ρ).



Problema 16

La densidad electrónica en el átomo de H puede representarse como $\rho = \frac{e}{\pi} e^{-2r}$ .Calcular:

a) El campo eléctrico E(r). Grafique.
b) El potencial eléctrico V(r). Grafique.

(Cuidado!: Este caso no puede tratarse como el de ρ constante. La carga encerrada no es ρ.V.)

Problema 17

La región interior a un largo cilindro de radio R [m] se carga con una densidad $\rho = \rho_0\,(1 - r/R)$ [C/m³], donde ρ_0 es una constante positiva, siendo r la distancia medida desde el eje del cilindro. Encontrar a qué distancia del eje el campo eléctrico es máximo y calcule esta magnitud máxima. Grafique **E**(r) y V(r).

Problema 18

Dos placas conductoras paralelas separadas una distancia *d*, en las cuales una de las placas se encuentra a un potencial V=0 y la otra a un potencial $V=V_d$. Encontrar la función potencial dentro del capacitor utilizando la ecuación de Laplace.

Problema 19

Calcular nuevamente el inciso b) del problema 29 de la guía 1 pero resolviendo explícitamente la ecuación de Laplace y en base a dicho resultado realizar el inciso a) del citado ejercicio.

Problema 20

Se tienen dos conductores esféricos concéntricos de radios R_1 y R_2 ($R_1<R_2$). La región entre R_1 y R_2 es vacío. La esfera interior se encuentra a un potencial $V=V_0$ y la esfera exterior se encuentra conectada a tierra (V=0). Calcular el potencial V(*r*) en la región entre los dos conductores haciendo uso de la ecuación de Laplace.

Problema 21

Considere una carga +*q* fija a una distancia *d* sobre un plano conductor infinito, dispuesto horizontalmente, puesto a tierra.

a) Halle el potencial y el campo en la región sobre el plano ¿Qué valor tiene el campo eléctrico debajo del plano?

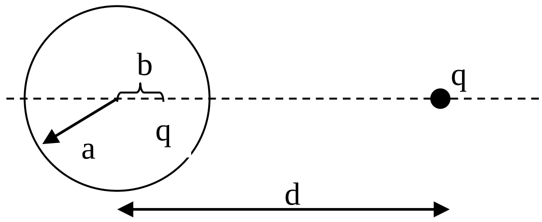
b) Determine la densidad de carga sobre el plano conductor ¿Por qué en este caso la densidad de carga inducida no es nula? Integre la densidad de carga a lo largo de todo plano.

c) Explique, cualitativamente, las diferencias que se observarían, tanto en la distribución de cargas del plano como en el campo eléctrico y el potencial electrostático, si el plano no estuviera conectado a tierra.

Problema 22

Considere una carga puntual a una distancia *d* de una esfera conductora con V=0 como muestra la figura.

a) Dibuje en forma cualitativa las líneas de Faraday para el sistema basándose en las propiedades de un conductor.
b) Obtenga una expresión para V(r) (r>*a*)
c) Encuentre la densidad de carga inducida *q´* sobre la superficie como función de θ.
d) Integre dicha densidad para obtener la carga total inducida *q'*.
e) Calcule la magnitud de la fuerza atractiva entre la esfera y la carga.
f) Verifique que las líneas de fuerza Faraday calculadas concuerdan con lo esperado de acuerdo al inciso a).



Problema 23

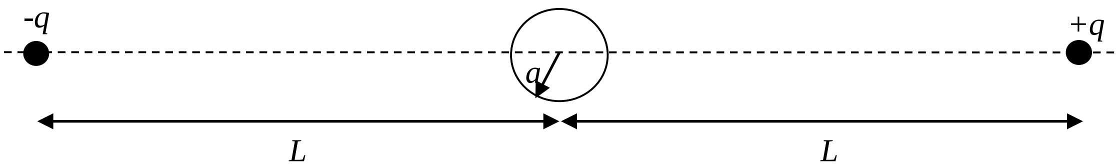
¿Qué pasaría si la esfera del problema anterior estuviera puesta a un potencial V_0 en vez de tierra? ¿Dónde ubicaría una segunda carga imagen y como quedaría la expresión para V(r) en este caso? Repetir los incisos *c)* y *d)* del ejercicio anterior.

Problema 24

Explore que pasaría si en el problema 22 se hubiera puesto un conductor de forma cúbica en vez de esférica. ¿Hubiera sido posible ubicar en algún lugar dentro del cubo una carga imagen *q´* que hubiera hecho V=0 sobre toda la superficie del conductor? ¿Qué se puede concluir?

Problema 25

Considerar el caso de una esfera conductora *descargada* de radio *a* ubicada un campo eléctrico uniforme de magnitud E_0



a) Teniendo en cuenta las propiedades de los conductores, dibujar las líneas de fuerza y la distribución de cargas inducidas en la superficie
b) Resuelva el problema por el método de carga-imagen.*(Ayuda: generar el campo eléctrico uniforme utilizando un dipolo eléctrico separado a grandes distancias. El problema se torna similar al 22). Notar que en el límite deseado se puede utilizar la relación* $(1+x)^{-1/2} \approx 1-x/2$.)
c) Resolviendo el problema mediante la ecuación de Laplace[1] el potencial queda determinado por la expresión $V(r,\theta)=V_0 - E_o\, r \cos\theta + E_o\, a^3 r^{-2} \cos\theta$, donde V_0 es el potencial en la superficie de la esfera. Utilizar la expresión de potencial dada por Laplace para obtener el vector campo eléctrico **E**, calcular la densidad superficial de carga en función del ángulo θ, σ(θ), y verificar que la carga total sobre la esfera es cero.

[1] Para un tratamiento basado en la resolución de la ecuación de Laplace consultar la sección 3.5 del libro de Reitz-M