Campo eléctrico de un dipolo

Para el sistema considerado (Fig.1) se tiene

$$\begin{aligned} \vec{r}_+ &= \vec{r}_P - \vec{r}_{q_+} = r\cos\theta\hat{x} + r\sin\theta\hat{y} - \frac{d}{2}\hat{x} \\ \vec{r}_- &= \vec{r}_P - \vec{r}q_- = r\cos\theta\hat{x} + r\sin\theta\hat{y} - \left(-\frac{d}{2}\right)\hat{x}. \end{aligned} \tag{1}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \vec{r}_+ &= \left(r\cos\theta - \frac{d}{2}\right)\hat{x} + r\sin\theta\hat{y}, \quad |\vec{r}_+| = \sqrt{r^2 - 2r\cos\theta\frac{d}{2} + \frac{d^2}{4}} \\ \vec{r}_- &= \left(r\cos\theta + \frac{d}{2}\right)\hat{x} + r\sin\theta\hat{y}, \quad |\vec{r}_-| = \sqrt{r^2 + 2r\cos\theta\frac{d}{2} + \frac{d^2}{4}}. \end{aligned} \tag{2}$$

El campo eléctrico para una carga puntual se puede expresar como

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \tag{3}$$

Entonces, para las cargas q_+ y q_- se puede escribir

$$\begin{aligned} \vec{E}\left(\vec{r}_+\right) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left(r\cos\theta - \frac{d}{2}\right)\hat{x} + r\sin\theta\hat{y}}{\left(r^2 - 2r\cos\theta\frac{d}{2} + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}} \\ \vec{E}\left(\vec{r}_-\right) &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left(r\cos\theta + \frac{d}{2}\right)\hat{x} + r\sin\theta\hat{y}}{\left(r^2 + 2r\cos\theta\frac{d}{2} + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{4}$$

El campo total en el punto P se puede escribir como $\vec{E}_{total}\left(\vec{r}\right) = \vec{E}\left(\vec{r}_+\right) + \vec{E}\left(\vec{r}_-\right)$. Los denominadores de estos campos pueden ser escritos de la forma

$$\begin{aligned} r^2 - dr\cos\theta + \frac{d^2}{4} &= r^2\left(1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right) \\ r^2 + dr\cos\theta + \frac{d^2}{4} &= r^2\left(1 + \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Si se considera el límite en el que $r \gg d$ el último término de estas expresiones puede ser despreciado, es decir

$$\begin{aligned} r^2 - dr\cos\theta + \frac{d^2}{4} &\approxeq r^2\left(1 - \frac{d}{r}\cos\theta\right) \approxeq |\vec{r}_+|^2 \\ r^2 + dr\cos\theta + \frac{d^2}{4} &\approxeq r^2\left(1 + \frac{d}{r}\cos\theta\right) \approxeq |\vec{r}_-|^2. \end{aligned} \tag{6}$$

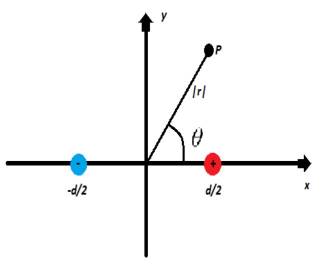

Figura 1: Dipolo eléctrico

Por esto, se puede escribir

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{r}_+|^3} &= \frac{1}{r^3}\left(1-\frac{d}{r}\cos\theta\right)^{-3/2}\\ \frac{1}{|\vec{r}_-|^3} &= \frac{1}{r^3}\left(1+\frac{d}{r}\cos\theta\right)^{-3/2}.\end{aligned} \tag{7}$$

Considerando la expansión del binomio de Newton

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k-1}{k}x^k, \tag{8}$$

donde

$$\begin{aligned}\binom{r+k-1}{k} &= \frac{1}{k!}\prod_{n=0}^{k-1}(r+k-1-n)\\ &= \frac{(r+k-1)(r+k-1-1)(r+k-1-2)\ldots(r+k-1-n)}{k!},\end{aligned} \tag{9}$$

y

$$\binom{r+0-1}{0} = 1 \quad \forall r. \tag{10}$$

Para $r = 3/2$ y considerando términos hasta $k = 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^{3/2}} &= \sum_{k=0}^{1}\binom{3/2+k-1}{k}x^k = \binom{3/2+0-1}{0}x^0 + \binom{3/2+1-1}{1}x^1\\ &= 1+\frac{3}{2}x.\end{aligned} \tag{11}$$

Si ahora se considera $x = \frac{d}{r}\cos\theta$ para $\vec{r}_+$ y $x = \frac{-d}{r}\cos\theta$ para $\vec{r}_-$ se puede escribir

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{r}_+|^3} &= \frac{1}{r^3}\left(1+\frac{3d\cos\theta}{2r}\right)\\ \frac{1}{|\vec{r}_-|^3} &= \frac{1}{r^3}\left(1-\frac{3d\cos\theta}{2r}\right).\end{aligned} \tag{12}$$

Reemplazando (12) en la expresión del campo eléctrico (3) se obtiene

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}_+) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\left(r\cos\theta-\frac{d}{2}\right)\hat{x}+r\sin\theta\hat{y}\right]\left[1+\frac{3d\cos\theta}{2r}\right]\\ \vec{E}(\vec{r}_-) &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\left(r\cos\theta+\frac{d}{2}\right)\hat{x}+r\sin\theta\hat{y}\right]\left[1-\frac{3d\cos\theta}{2r}\right]\end{aligned} \tag{13}$$

Por lo tanto, el campo total es

$$\vec{E}_{total}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\left(3d\cos^2\theta-d\right)\hat{x}+(3d\sin\theta\cos\theta)\hat{y}\right]. \tag{14}$$

La expresión de los versores $\hat{x}$, $\hat{y}$ en coordenadas polares es

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \cos\theta\hat{e}_r - \sin\theta\hat{e}_\theta\\ \hat{y} &= \sin\theta\hat{e}_r + \cos\theta\hat{e}_\theta.\end{aligned} \tag{15}$$

Realizando este cambio de coordenadas, el campo total tiene la expresión

$$\vec{E}_{total}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[2qd\cos\theta\hat{e}_r + qd\sin\theta\hat{e}_\theta\right]. \tag{16}$$

El momento dipolar eléctrico se define $\vec{p} = q\vec{d}$, por lo que se tiene $|\vec{p}| = qd$. Reemplazando en la expresión del campo se obtiene el resultado deseado

$$\vec{E}_{total}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2p\cos\theta}{r^3}\hat{e}_r + \frac{p\sin\theta}{r^3}\hat{e}_\theta\right] \tag{17}$$