Guía 0: Introducción a la notación Indicial

Problema 1

Sean A_μ y B^μ dos 4-vectores, demostrar que $\mathrm{K} \equiv \mathrm{A}_\mu \mathrm{B}^\mu$ es un escalar.

Problema 2

Sean A^μ y B^ν dos 4-vectores contravariantes, demostrar que $\mathrm{T}^{\mu\nu} \equiv \mathrm{A}^\mu B^\nu$es un tensor contravariante.

Problema 3

Sea B^μ un vector contravariante y $\mathrm{A}_{\alpha\mu}$ un tensor covariante, pruebe que $\mathrm{X}_\alpha \equiv \mathrm{B}^\mu\ \mathrm{A}_{\alpha\mu}$ es un vector.

Problema 4

La traza de un tensor mixto $\mathrm{T}^\mu{}_\nu$ es $\mathrm{Tr}(\mathrm{T}^\mu{}_\nu) \equiv \mathrm{T}^\mu{}_\mu$. Demuestre que $\mathrm{Tr}(\mathrm{T}^\mu{}_\nu)$ es un escalar.

Problema 5

Dada la ley de transformación $\mathrm{x}'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu$, las transformaciones de Lorentz de la relatividad especial son aquellas que dejan invariante el elemento de arco $\mathrm{ds}^2 = dx^\mu \mathrm{dx}_\mu$.

a) Demostrar que $a^\mu_\nu a^\epsilon_\mu = \delta^\varepsilon_\nu$

b) Demostrar que $a^{\mu\nu} a_{\mu\varepsilon} = \delta^\nu_\varepsilon$

c) Usando los resultados anteriores, demostrar que det $(a) = \pm 1$

Problema 6

Dados los números

$$
\begin{gathered}
\mathrm{A}^0=5,\ \mathrm{A}^1=0,\ \mathrm{A}^2=\text{-}1,\ \mathrm{A}^3=\text{-}6 \\
\mathrm{B}^0=0,\ \mathrm{B}^1=\text{-}2,\ \mathrm{B}^2=4,\ \mathrm{B}^3=0 \\
\mathrm{C}_{00}=1,\ \mathrm{C}_{01}=2,\ \mathrm{C}_{02}=2,\ \mathrm{C}_{03}=3 \\
\mathrm{C}_{10}=5,\ \mathrm{C}_{11}=\text{-}2,\ \mathrm{C}_{12}=\text{-}2,\ \mathrm{C}_{13}=0 \\
\mathrm{C}_{20}=4,\ \mathrm{C}_{21}=5,\ \mathrm{C}_{22}=2,\ \mathrm{C}_{23}=\text{-}2 \\
\mathrm{C}_{30}=\text{-}1,\ \mathrm{C}_{31}=\text{-}1,\ \mathrm{C}_{32}=\text{-}3,\ \mathrm{C}_{33}=0
\end{gathered}
$$

encontrar

a) $A^{\alpha}B_{\alpha}$

b) $A^{\alpha}C_{\alpha\beta}$ para todo β

c) $A^{\gamma}C_{\gamma\sigma}$ para todo σ

d) A^{α} B_{β} para todo α y β