Guía III: Gauges

Problema 1.

Muestre que en el sistema $\sum'$, que se mueve con velocidad relativa $\mathbf{u}$ respecto del sistema $\sum$ el gradiente $\boldsymbol{\nabla}$ se transforma como sigue

$$\boldsymbol{\nabla}' = \boldsymbol{\nabla} + \left\{ (\gamma_{\mathbf{u}} - 1) \frac{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}}{\|\mathbf{u}\|^2} + \frac{\gamma_{\mathbf{u}}}{c^2} \partial_t \right\} \mathbf{u}$$

Problema 2.

Demuestre el criterio del cociente:

Si la contracción de una entidad $T^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\gamma\delta\cdot\cdot}$ *con un tensor* **arbitrario** $B^{\mu\nu\cdot\cdot}_{\eta\xi\cdot\cdot}$ *produce un tensor* $A^{\sigma\tau\cdot\cdot}_{\lambda\epsilon\cdot\cdot}$ *, entonces* $T^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\gamma\delta\cdot\cdot}$ *es un tensor.*

Problema 3. Muestre que:

a) el calibre $(0, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ donde

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c} \left(ct - |x|\right)^2 \hat{\mathbf{z}} & \text{si } |x| < ct \\ 0 & \text{si } |x| > ct \end{cases}$$

es de Coulomb y Lorentz a la vez

b) el calibre $(0, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ donde

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qt}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

no es de Coulomb ni de Lorentz

c) el calibre $(0, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ donde

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = A_0 \, sen\left(kx - \omega t\right) \hat{\mathbf{y}}$$

es de Coulomb y Lorentz a la vez

Problema 4.

a) Muestre que para una partícula puntual de carga q situada en el origen los calibres

$$\begin{pmatrix} \phi_1/c \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}\frac{1}{r} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_2/c \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{t}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \end{pmatrix}$$

son admisibles y correctos.

b) Muestre que ambos calibres se relacionan con la transformación de calibre

$$\begin{pmatrix} \phi_1/c \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2/c \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_2 \end{pmatrix} + \begin{Bmatrix} -\partial_t \Lambda/c \\ \boldsymbol{\nabla}\Lambda \end{Bmatrix}$$

y función de calibre $\Lambda = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{t}{r}$

Problema 5.

Se define como calibre temporal aquel en el cual $\phi \equiv 0$.

Muestre que en este calibre las ecuaciones definitorias del potencial vectorial $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ son

$$\frac{1}{c}\partial_t^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\mathcal{A}} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{1}$$

Problema 6.

Muestre que el calibre de Liénard-Wiechert para una carga puntual q que en $t = 0$ pasa por el origen

$$\begin{pmatrix} \phi/c \\ \boldsymbol{\mathcal{A}} \end{pmatrix} = \frac{q/\left(4\pi\epsilon_0 c\right)}{\sqrt{\left(c^2 t - \mathbf{r}\cdot\mathbf{v}\right)^2 + \left(c^2 - v^2\right)\left(r^2 - c^2 t^2\right)}} \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

satisface la condición de Lorentz.

Problema 7.

Considere dos sistemas inerciales $\sum$ y $\sum'$ que se mueven uno respecto del otro con velocidad constante y con ejes paralelos. Sean $\{\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{B}}\}$ los campos en el sistema $\sum$ y $\{\boldsymbol{\mathcal{E}}', \boldsymbol{\mathcal{B}}'\}$ los mismos campos en el sistema $\sum'$.

Muestre que

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}' \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}'$$

$$\frac{1}{c^2}\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2 = \frac{1}{c^2}\mathcal{E}'^2 - \mathcal{B}'^2$$

Problema 8.

Probar que los campos eléctricos y magnéticos se transforman de acuerdo a

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}' = \gamma_{\mathbf{v}} \left(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\mathcal{B}} \right) - \frac{\gamma_{\mathbf{v}}^2}{\gamma_{\mathbf{v}} + 1} \left(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \right) \frac{\mathbf{v}}{c^2}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}' = \gamma_{\mathbf{v}} \left(\boldsymbol{\mathcal{B}} - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}/c^2 \right) - \frac{\gamma_{\mathbf{v}}^2}{\gamma_{\mathbf{v}} + 1} \left(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} \right) \frac{\mathbf{v}}{c^2}$$

Problema 9.

a) Una corriente I fluye a través de un conductor delgado rectilíneo y de longitud infinita. Calcule el campo magnético $\mathbf{B}$ a una distancia r del conductor.

b) Un conductor delgado rectilíneo y de longitud infinita es cargado con una densidad de carga lineal ρ. Calcule el campo eléctrico $\mathbf{E}$ a una distancia r del conductor.

c) En el sistema $\sum$ una corriente I fluye a través de un conductor delgado rectilíneo y de longitud infinita mientras que una carga q se mueve paralela a la dirección del conductor con una velocidad u a una distancia r. Estudie el movimiento de la carga en el sistema propio del conductor y en el sistema propio de la carga.

Problema 10.

Una carga q se mueve en un circulo centrado en el origen y de radio a en el plano $x - y$ con velocidad angular constante ω. Si su linea de mundo en el sistema $\sum$ es $c^{\nu} = \begin{pmatrix} c\tau \\ \mathbf{x}'(\tau) \end{pmatrix}$, encuentre los potenciales de Liénard-Wiechert en el 4-punto P con coordenadas $\begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} = z\hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix}$.

Problema 11.

Muestre que para una partícula de carga q que se mueve con velocidad constante con linea de mundo parametrizada por $\begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x}_c(t) \end{pmatrix}$ el tiempo retardado t_r con respecto a un punto espacio temporal arbitrario $\begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$ obedece

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{1}{c}\mathbf{v}_c(t_r) \cdot \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t_r) \right)^{\wedge}}$$

y

$$\nabla t_r = -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t_r))^{\wedge}}{c}\frac{\partial t_r}{\partial t}$$

Entonces luego muestre que los campos generados son

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(t,\mathbf{x}) = q\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{v}t)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{v}t\|^3}\frac{\left(1-\boldsymbol{\beta}^2\right)}{\left(1-\frac{\|\mathbf{x}\times\boldsymbol{\beta}\|^2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{v}t\|^2}\right)^{3/2}}$$

y

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\mathbf{x}) = (\mathbf{x}-\mathbf{x}_c(t_r))^{\wedge}\times\boldsymbol{\mathcal{E}}/c$$

Problema 12.

Mostrar que una partícula relativista que se mueve con velocidad **u** en un campo electromagnético tiene una 3-aceleración

$$\mathbf{a} = \mathring{\mathbf{u}} = \frac{e}{\gamma m_0}\left[\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{1}{c}\mathbf{u}\times\boldsymbol{\mathcal{B}} - \frac{1}{c^2}\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}\right]$$

Problema 13.

Una partícula cargada se mueve en un campo magnético uniforme con una componente de la velocidad paralela al campo no nula. Muestre que un calculo relativista de la trayectoria da una hélice como en el caso no relativista.

Problema 14.

El campo eléctrico debido a una línea de carga infinita a lo largo del eje $\hat{x}$, con densidad de carga por unidad de longitud η, viene dado por

$$E = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0(y^2+z^2)}\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}$$

mientras que el campo magnético es nulo, dado que para cargas estáticas $B = 0$.

Encuentre las expresiones para el campo eléctrico y magnético válidas para un observador moviéndose con velocidad v en la dirección $\hat{x}$.

Problema 15.

El campo eléctrico debido a una carga puntual estacionaria q viene dado por

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mientras que el campo magnético es nulo, dado que para cargas estáticas $B = 0$.

Encuentre las expresiones para el campo eléctrico y magnético válidas para un observador moviéndose con velocidad v en la dirección $\hat{x}$.