Guía I: Cinemática Relativista

Problema 1.

Dos eventos ocurren en el mismo lugar y separados por 3 segundos en el sistema de referencia inercial del laboratorio.

a) ¿ Cuál es la distancia espacial entre dichos eventos según un observador en un cohete, para el cual los dos eventos ocurren uno 5 segundos después del otro?. Suponer que el cohete viaja con velocidad constante respecto al laboratorio.

b) ¿Cuál es la velocidad relativa entre los sistemas de referencia cohete y laboratorio?

Problema 2.

Considere un sistema de referencia inercial S (laboratorio) de origen O y otro sistema inercial S′ de ejes paralelos al anterior fijo a un cohete, cuyo origen O′ se desplaza con velocidad v $\hat{x}$ respecto de O, de modo que O=O′ en t=0=t′.
Una varilla se encuentra en reposo en el cohete, donde mide L_0 (longitud propia).

a) Si la varilla está alineada con el eje x, ¿cuánto medirá para un observador en el laboratorio?.

b) ¿ Cómo se verá la varilla móvil desde el laboratorio si en el cohete estuviese apoyada formando un ángulo α' con la dirección O′x′?. En particular, analizar el caso $\alpha' = \pi/2$.

c) Considere una partícula con velocidad v’ respecto al cohete, la cual forma un ángulo α' con el eje x′. ¿ Cuál es la velocidad de la partícula medida en el laboratorio?.

Problema 3.

Un cohete lleva un reloj en su interior con el cual encuentra que el tiempo transcurrido entre dos sucesos es T_0.

a) ¿Cuál es el tiempo transcurrido para un observador en el laboratorio?

b) ¿Qué pasaría si el reloj que mide T_0 ahora estuviese en el laboratorio?. ¿Cómo se verifica la simetría entre el sistema del laboratorio y el del cohete requerida por el principio de relatividad?.

Problema 4.

El radio de la tierra medido por un observador en reposo respecto de ella es de 6400 km y la velocidad de traslación alrededor del sol es de 30 km/s. Cuanto parece acortarse el diámetro de la tierra respecto de un observador situado en el sol?

Problema 5.

Asuma que la edad de la tierra es 10^9años en un sistema de referencia inercial (llamado sistema tierra) en el cual la posición promedio de la tierra a lo largo del tiempo se encuentra en el origen. De acuerdo a la biblia, la edad de la tierra es de 6000 años. Encuentre

a) $\gamma = cosh(\zeta)$

b) La rapidez ζ (con respecto al sistema tierra) de un sistema de referencia inercial en el cual la edad de la tierra es de 6000 años.

c) Calcule los dos primeros dígitos significativos de 1-β ($\beta = tanh(\zeta)$) para ese sistema de referencia.

Problema 6.

A y B viajan a $\frac{4}{5}c$ y $\frac{3}{5}c$ respecto de tierra, como se muestra en la siguiente figura

a) ¿Qué tan rápido deberá viajar C de manera tal que vea tanto a A como a B aproximarse a la misma velocidad?

b) ¿A qué velocidad los ve aproximarse?

Problema 7.

Un tren con longitud propia L avanza con velocidad $\frac{c}{2}$ con respecto a tierra. Una pelota es arrojada desde la parte posterior del tren hacia el frente, a una velocidad de $\frac{c}{3}$respecto del tren. Cuanto tiempo le toma en llegar al frente y que distancia cubre visto desde

a) El tren

b) Tierra

c) La pelota

Problema 8.

Verifique en el Problema 7 que el intervalo invariante es el mismo en los 3 sistemas de referencia considerados.

Problema 9.

Verifique en el Problema 7 que el tiempo en el sistema de referencia de la pelota y en el de tierra, están relacionados por el factor γ

Problema 10.

Dos naves espaciales se encuentran en reposo una con respecto a la otra. Se hallan conectadas por medio de una cuerda, la cual si bien es fuerte no soporta un estiramiento indefinido. En un determinado instante de tiempo (con respecto al sistema inercial inicial) comienzan a acelerar en la misma dirección (a lo largo de la línea que hay entre ellas) con la misma aceleración propia constante. ¿ Podría la soga eventualmente cortarse?

Problema 11.

En un dado sistema de referencia, el evento 1 ocurre en $x = 0$, $ct = 0$ y el evento 2 ocurre en $x = 2$ $ct = 0$ (en unidades de una longitud dada). Encuentre un sistema de referencia en el cual los dos eventos son simultáneos.

Problema 12.

En el sistema de laboratorio, un objeto se mueve con velocidad (u_x, u_y) y usted se mueve con velocidad v en la dirección x. Cual debería ser el valor de v para que usted también vea el objeto moverse con velocidad u_y en su dirección y ?. Una solución es $v = 0$, encuentre la otra.

Problema 13.

Dos planetas, A y B se hallan en reposo con respecto a cada uno, a una distancia L y con relojes sincronizados. Una nave espacial vuela a velocidad v desde el planeta A hacia el planeta B y sincroniza su reloj con A justo cuando pasa por este (ambos setean su reloj en cero en ese momento). La nave espacial eventualmente pasa por B y compara su reloj con el reloj de B. Nosotros sabemos, por trabajar en el sistema de referencia de los planetas, que cuando la nave espacial alcanza B, el reloj de B arroja una lectura $\frac{L}{v}$. Y el reloj de la nave espacial arroja una lectura $\frac{L}{\gamma v}$, debido a que corre más lento por un factor γ cuando es vista desde el sistema de referencia del planeta.
Como podría alguien en la nave espacial explicar cuantitativamente porqué el reloj de B arroja una lectura $\frac{L}{v}$ (la cual es mayor que la lectura propia $\frac{L}{\gamma v}$), considerando que la nave ve al reloj en B correr más lento.

Problema 14.

Dos bombas se hallan el la plataforma de un tren separadas una distancia L. A la vez que el tren pasa a una velocidad v, las bombas explotan simultáneamente (en el sistema de referencia de la plataforma) y deja marcas en el tren, con una separación entre las marcas de γL cuando son observadas desde el sistema de referencia del tren.
Como puede alguien en el sistema de referencia del tren explicar de manera cuantitativa porque las marcas se hallan a una distancia γL, considerando que las bombas se hallan a una distancia de solo $\frac{L}{\gamma}$ en el sistema de referencia del tren.

Problema 15.

Un fotón se mueve con un ángulo θ con respecto al eje x$'$en el sistema S$'$. El sistema S$'$se mueve a una velocidad v con respecto al sistema S (a lo largo del eje x). Calcule las componentes de la velocidad del fotón en el sistema S y verifique que la velocidad es c.

Problema 16.

Un objeto se mueve con velocidad v_1 con respecto a un sistema S$'$. El sistema S$'$ se mueve a una velocidad v_2 con respecto al sistema S (en la misma dirección que el movimiento del objeto).

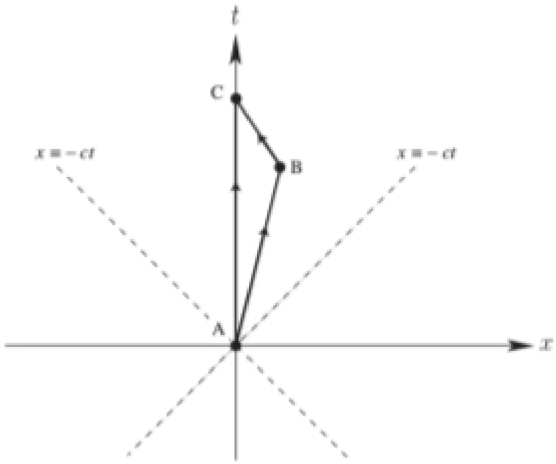
a) ¿ Cual es la velocidad u, del objeto respecto del sistema S ?. Resuelva el problema (es decir derive la fórmula de adición de velocidades), dibujando el diagrama de Minkowski con los sistemas S y S$'$, dibujando la línea de mundo para el objeto, y haciendo geometría.

Problema 17.

En relatividad especial, el tiempo propio de un determinado camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^4$ con $\gamma(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), t(\lambda))$ está definido por la cantidad

$$\frac{1}{c}\int_a^b \sqrt{-[x'(\lambda)]^2 - [y'(\lambda)]^2 - [z'(\lambda)]^2 + c^2[t'(\lambda)]^2}\, d\lambda$$

donde c es la velocidad de la luz. Teniendo en cuenta el diagrama de la figura



demuestre que

tiempo propio (AB)+tiempo propio (BC) $<$ tiempo propio (BC). (Lo cual es un caso especial de la denominada "paradoja de los gemelos")

Problema 18.

La línea de mundo de una partícula en un sistema de referencia inercial S viene dada por $x(t) = at + b\, sen(wt)$; $y(t) = b\, cos(wt)$;$z(t) = 0$. Calcule la 4-velocidad y la 4-aceleración de la partícula.

Problema 19.

Desde un cohete que viaja con velocidad v respecto al laboratorio, se emiten señales luminosas de frecuencia ν_0 medida en el cohete. Si v es paralela al eje x, determinar la frecuencia ν con que se recibe en cualquier punto del plano (x, y) del laboratorio la luz emitida por el cohete ("efecto Doppler"). Para ello:

a) Haga el cálculo suponiendo que la luz consta de pulsos emitidos periódicamente desde el cohete con período $\tau_0 = 1/\nu_0$. Entonces $\nu = 1/\tau$, donde τ es el tiempo entre la recepción de dos pulsos consecutivos en un punto dado del laboratorio. Calcule directamente, y usando diagramas de espacio-tiempo.
Ayuda: para $\gamma = 1$ se obtiene el efecto Doppler clásico, válido para ondas de sonido (que por ejemplo explica el cambio del tono de la bocina de un auto cuando pasa al lado del observador).

Problema 20.

Demuestre que

a) si X($\neq 0$) es del tipo temporal, existe un sistema de referencia inercial en el cual posee componentes espaciales nulas.

b) si X($\neq 0$) es del tipo espacial, existe un sistema de referencia inercial en el cual posee componente temporal nula.

Problema 21.

Pruebe que la 4-velocidad y el 4-momento, son 4-vectores.

Problema 22.

Explique porque

$$\left(\frac{dt^0}{dt}, \frac{dX^1}{dt}, \frac{dX^2}{dt}, \frac{dX^3}{dt}\right)$$

no es un 4-vector

Problema 23.

Demuestre que las la suma (o resta) relativista de velocidades u y v tiene un factor γ dado por $\gamma = \gamma_u \gamma_v (1 \ \pm uv)$