TRAZADO DE LÍNEAS EQUIPOTENCIALES

Objetivo: Obtener un mapa de líneas de igual potencial, en dos dimensiones, para una configuración dada de conductores cargados, por medio de un método numérico.

Introducción teórica y planteo del problema:

En el vacío y en ausencia de cargas libres, el potencial electrostático V verifica la Ecuación de Laplace:

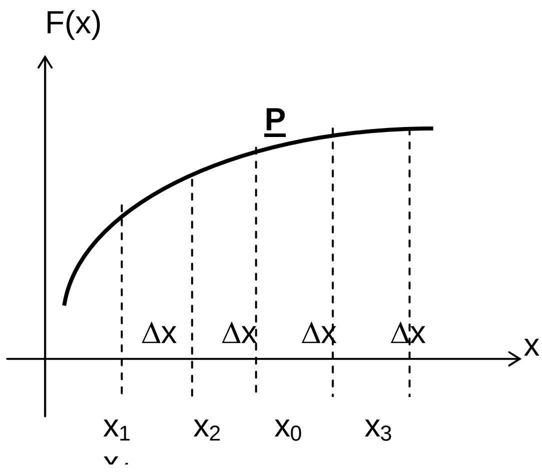
$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

A su vez, el potencial V está relacionado con el campo electrostático por:

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,V = -\overrightarrow{\nabla V} \qquad (2)$$

Para conocer el potencial $V = V(x, y, z)$ en una región dada del espacio se debe resolver la ecuación diferencial (1), con las condiciones de borde del problema. Estas condiciones pueden hacer sumamente difícil o imposible la solución analítica, por lo que en general se recurre al uso de métodos analógicos o numéricos para resolver este problema.

Los conocimientos adquiridos hasta el momento, nos permiten la comprensión de la solución obtenida a partir de un método numérico de resolución sencilla. Se trata de resolver la Ecuación de Laplace en forma aproximada, discretizando el espacio en intervalos regulares y convirtiendo las derivadas en cocientes de incrementos finitos. En una dimensión la derivada aproximada de una función F(x) en el punto P respecto rescpecto de su variable x puede expresarse como:



$$[df/dx]_{x0} \approx [f(x_3) - f(x_2)] / 2\,\Delta x$$

Luego, para la segunda derivada se tiene:

$$[d^2f/dx^2]_{x0} \approx \{[df/dx]_{x3} - [df/dx]_{x2}\} / 2\ \Delta x$$

Finalmente, evaluando las derivadas en los puntos 2 y 3 de la misma manera que fue hecho para P:

$$[df/dx]_{x3} \approx [f(x_4) - f(x)] / 2\ \Delta x \qquad\qquad [df/dx]_{x2} \approx [f(x) - f(_{x1})] / 2\ \Delta x$$

$$[d^2f/dx^2]_{x0} \approx \frac{\{[f(x_4) - f(x_0)] / 2\ \Delta x\} - \{[f(x_0) - f(x_1)] / 2\ \Delta x\ \}}{2\ \Delta x}$$

Si la función cumple con la ec de Lapalce, entonces:

$$[d^2f/dx^2]_{x0} = 0$$

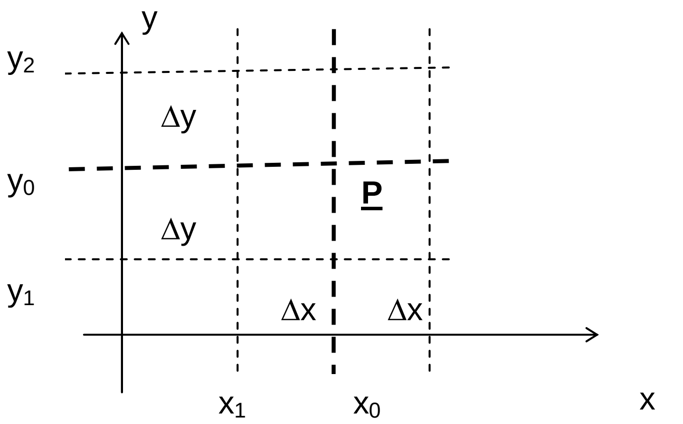
$$\frac{\{[f(x_4) - f(x_0)] / 2\ \Delta x\} - \{[f(x_0) - f(x_1)] / 2\ \Delta x\ \}}{2\ \Delta x} = 0$$

y $$\mathbf{f(x_0) = \{f(_{x4}) + f(_{x1})\} / 2}$$

Esto es: si una función cumple con la condición que su derivada segunda es nula, su valor en un punto cualquiera x es, **aproximadamente**, el promedio de los valores en los puntos (x - 2 Δx) y (x + 2 Δx). La aproximación será tanto más exacta cuando menor sea el intervalo de discretización Δx.

Para el espacio bidimensional, se puede mostrar que:

$$F(x_0,y_0) = \{f(x_0,y_1) + f(x_0,y_2) + f(x_1,y_0) + f(x_2,y_0)\} / 4$$



El valor de la función en un punto (en nuestro caso la función potencial V(x,y)) es, aproximadamente, el promedio de los valores en cuatro puntos ubicados simetricamente alrededor del mismo. La aproximación es tanto más exacta cuanto menor sea el intervalo Δx = Δy. Esto permite programar un algoritmo que asigne a cada punto el valor del promedio de cuatro puntos simétricos y, en sucesivas iteraciones (corridas) alcance el valor de equilibrio (método de relajación).

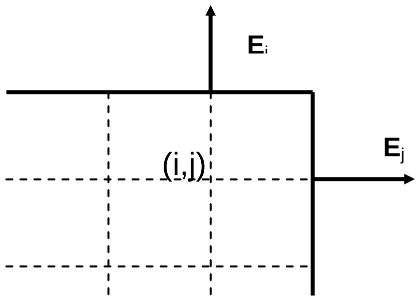
Se implementará este método en una planilla de Excel convirtiendo las celdas en elementos de una matriz de 160 x 220 elementos. A cada celda se le indica que calcule el valor que le corresponde como promedio de los cuatro que tiene alrededor (en el caso de los bordes el promedio de los tres y en las esquinas el promedio de los dos). En ¨Opciones¨ del menú ¨Herramientas¨, solapa ¨Calcular¨ se indica el número de iteraciones que se desean realizar y el error máximo admisible (Cambio máximo) de manera que el cálculo se detiene si se llega al número de iteraciones o cuando la diferencia entre dos cálculos sucesivos no es mayor, para ningún elemento de la matriz, que el valor del Cambio máximo.

Si en el sistema de conductores que se estudian hay alguno descargado, de manera que se redistribuyen sus cargas por efecto de la inducción producida por los otros, adquiere un potencial que depende de los potenciales de los demás y que corresponde al equilibrio elecrostático de todo el conjunto. Para su cálculo con el método numérico tendremos en cuenta: a)Que el campo eléctrico es el gradiente del potencial y b)La Ley de Gauss.

Sabiendo que el campo eléctrico es siempre perpendicular a la superficie del conductor y teniendo en cuenta a), lo podemos expresar, en forma aproximada como:

$$E_j = \frac{V(i,j+1) - V(i,j)}{\Delta j}$$

$$E_i = \frac{V(i+1,j) - V(i,j)}{\Delta i}$$



Aplicando b) y teniendo encuenta que el conductor no tiene carga, el flujo a través de la superficie del conductor debe ser nulo.
Podemos considerar elementos de superficie sobre el conductor de valor Δi o Δj por una altura arbitraria h (ya que estamos trabajando en dos dimensiones), de manera que el flujo total es:

$$\Phi = \sum_j E_i\, \Delta j\, h + \sum_i E_j\, \Delta i\, h = \sum_j \left(\frac{V(i+1,j) - V(i,j)}{\Delta i}\ \Delta j\ \ h \right) + \sum_i \left(\frac{V(i,j+1) - V(i,j)}{\Delta j}\ \Delta i\ h \right) = 0$$

Como en la discretización del espacio que hemos realizado $\Delta i = \Delta j$:

$$\sum_j \left(V(i+1,j) - V(i,j) \right) + \sum_i \left(V(i,j+1) - V(i,j) \right) = 0$$

y como V(i,j) es el potencial del conductor V_C:

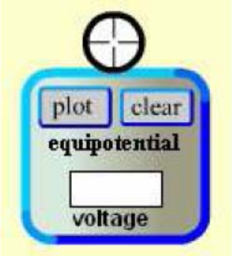
$$\sum_j \left(V(i+1,j) - V_c \right) + \sum_i \left(V(i,j+1) - V_c \right) = 0$$

$$\sum_j V(i+1,j) + \sum_i V(i,j+1) = (N+M)\, V_c$$

donde N+M es el número total de celdas que representan la superficie del conductor (Ya que j suma desde 1 hasta N e i desde 1 hasta M). Despejando V_c de la ecuación anterior concluimos que es igual al promedio de los potenciales de todos los puntos vecinos a su superficie.

$$V_c = \left[\sum V(i+1,j) + \sum V(i,j+1) \right] / (N + M)$$

Ejercicio 1: Exploración de cargas y campos
(http://phet.colorado.edu/new/simulations/sims.php?sim=Charges_and_Fields)
El propósito de este ejercicio es familiarizarse con la forma y apariencia de las líneas equipotenciales, en relación a un campor eléctrico dado.
Instrucciones:
1. En la esquina izquierda inferior de la pantalla van a localizar un cuadro similar a este:



El mismo es utilizado para encontrar el valor del potencial en el cualquier punto del espacio y graficar líneas equipotenciales en el área (para moverlo de lugar deben hacer click con el mouse sobre el cuadro y moverlo hacia donde desean conocer el potencial).

2. Hagan click en “Grid”, en el cuadro verde que se encuentra en el extremo inferior derecho. Esto les permitirá visualizar una grilla para poder medir distancias. (Tengan en cuenta la escala a la que se hace referencia en el extremo inferior de la pantalla). En la misma ventana verde, hagan click en “Show E-Ffield”, lo que les permitirá visualizar las líneas de campo.

3.Coloquen una carga positiva en el centro del área de testeo. ¿De qué manera indica el programa la dirección del campo generado? ¿De qué manera indica el programa la magnitud del campo en un punto dado? ¿En qué zonas el campo eléctrico es más intenso?

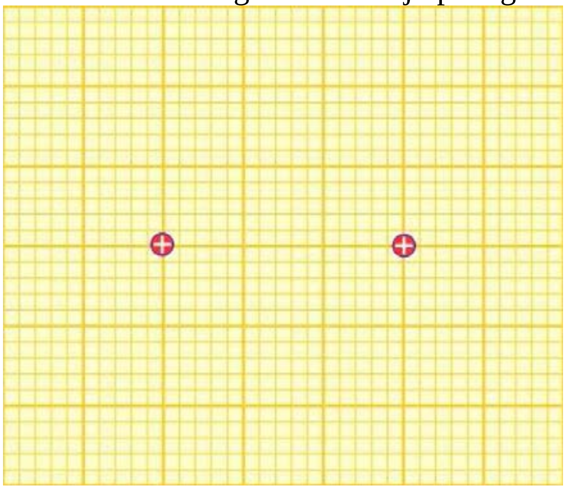
4. Muevan la herramienta equipotencial por distintas zonas del área de testeo (noten el cambio de color en el círculo de test de la herramienta). ¿En qué zona el potencial es mayor?
Utilicen la herramienta equipotencial para llenar la siguiente tabla (pueden utilizar la cinta metrica que se encuentra haciendo click en “Show numbers” y luego click en “tape measure”) :

Distancia (m)	Voltaje (V)
1	
2	
3	
4	
5	
6	

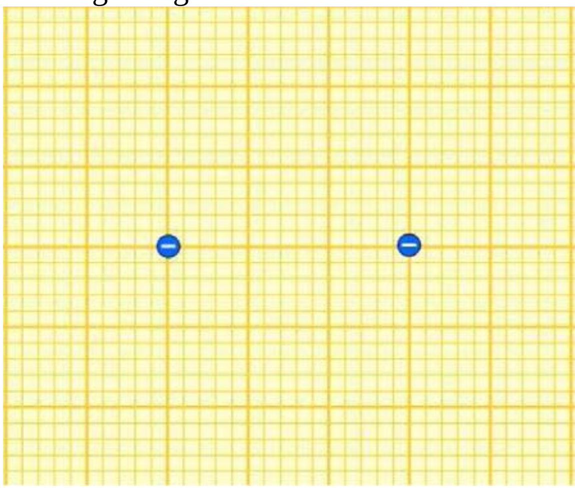
Crear un gráfico con los datos y responder la siguiente pregunta: ¿El voltaje debido a una carga puntual varía directamente o inversamente con la distancia de la carga?
Graficar una línea equipotencial con el botón plot de la herramienta. ¿Cómo está orientado el campo eléctrico respecto de la línea equipotencial?

5. Limpiar el área de testeo y colocar ahora una carga negativa. Visualizar el campo eléctrico y la línea equipotencial. ¿Cómo están orientadas las líneas de campo respecto a las líneas equipotenciales?

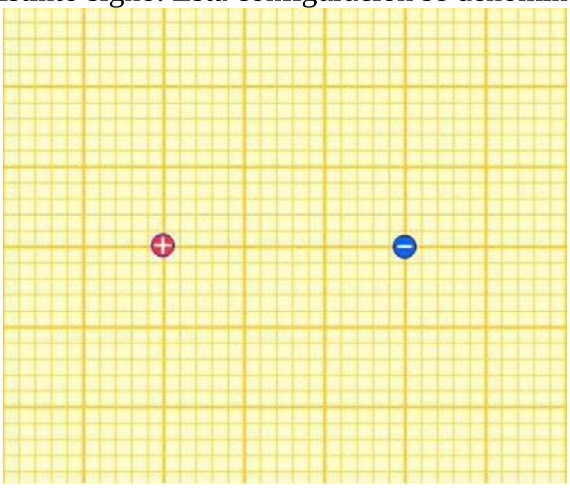
6. Volver a limpiar el área de testeo. Colocar ahora dos cargas positivas a una distancia de 3m. Visualizar el campo eléctrico y el potencial. Estó último se puede realizar haciendo click en “Show hi/lo-res V” en el cuadro verde. Utilicen el diagrama de abajo para graficar las líneas de campo.



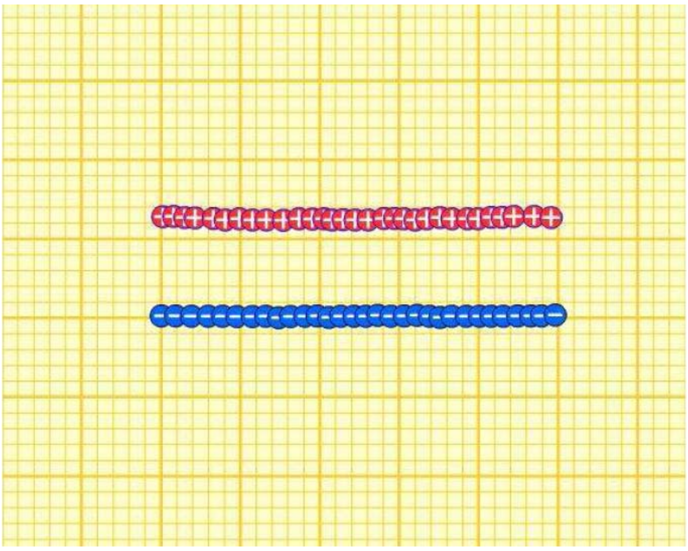
7. Repetir la operación con dos cargas negativas:



8. Idem con dos cargas de distinto signo. Esta configuración se denomina dipolo.



9. Idem con dos líneas de cargas opuestas. ¿Los campos elécticos generados por las configuraciones 8 y 9, son similares? ¿por qué?



10. Las siguientes afirmaciones son válidas para todas las confguraciones. Seleccione la palabra correcta en cada una de ellas.

- El campo eléctrico apunta hacia la dirección donde el voltaje **crece/decrece**.
- Una carga positiva puesta en un campo eléctrico se moverá expontáneamente **con/en contra** de la dirección del campo.
- Una carga positiva inserta en un campo eléctrico se moverá espontáneamente de regiones de **alto/bajo** potencial a regiones de **alto/bajo** potencial.
- Una carga negativa puesta en un campo eléctrico se moverá expontáneamente **con/en contra** de la dirección del campo.
- Una carga negativa positiva inserta en un campo eléctrico se moverá espontáneamente de regiones de **alto/bajo** potencial a regiones de **alto/bajo** potencial.

Ejercicio 2: Campo Eeléctrico de Hockey
(http://phet.colorado.edu/new/simulations/sims.php?sim=Electric_Field_Hockey)

El siguiente ejercicio es útil para comprender la respuesta de una partícula cargada frente a una determinada configuración de cargas puntuales. El objetivo es armar una configuración adecuada para que el disco llegue al arco, sorteando los obstáculos que se presentan según el nivel seleccionado. ¿Qué es lo que indica la flecha de color rosa que aparece en el disco negro? ¿Cómo debería ser la configuración si el disco estuviera cargado negativamente? ¿Existe alguna configuración para el caso en que el disco no tiene carga? ¿Por qué?