



Un buscador de tesoros usa un detector de metales en busca de objetos enterrados en una playa. En el extremo del detector de metales hay una bobina de alambre que es parte de un circuito. Cuando la bobina está cerca de un objeto metálico, la inductancia de la bobina se afecta y la corriente en el circuito cambia. Este cambio provoca una señal en los audífonos que lleva puestos el buscador.

- 32.1 Autoinducción e inductancia
- 32.2 Circuitos  $RL$
- 32.3 Energía en un campo magnético
- 32.4 Inductancia mutua
- 32.5 Oscilaciones en un circuito  $LC$
- 32.6 Circuito  $RLC$

# 32 Inductancia

En el capítulo 31 se vio que en una espira de alambre se inducen una fem y una corriente cuando el flujo magnético a través del área encerrada por la espira cambia con el tiempo. Este fenómeno de la inducción electromagnética tiene algunas consecuencias prácticas. En este capítulo, primero se describe un efecto conocido como *autoinducción*, en el cual una corriente variable con el tiempo en un circuito produce una fem inducida que se opone a la fem establecida inicialmente por dicha corriente. La autoinducción es la base del *inductor*, un elemento de circuito eléctrico. Se explica la energía almacenada en el campo magnético de un inductor y la densidad de energía asociada con el campo magnético.

A continuación estudiará la forma en que se induce una fem en una bobina como resultado de un flujo magnético cambiante producido por una segunda bobina; este es el principio básico de la *inducción mutua*. Por último, examinará las características de circuitos que contienen inductores, resistores y capacitores en diferentes combinaciones.

## 32.1 Autoinducción e inductancia

En este capítulo será necesario distinguir cuidadosamente entre fems y corrientes causadas por fuentes físicas como baterías y aquellas inducidas por campos magnéticos cambiantes. Cuando se utiliza un término sin adjetivos (por ejemplo, *fem* y *corriente*) se describe

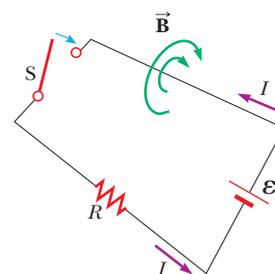


North Wind Picture Archives.

**JOSEPH HENRY**

Físico estadounidense (1797-1878) Henry se convirtió en el primer director del Instituto Smithsonian y en el primer presidente de la Academia de Ciencias Naturales. Mejoró el diseño del electroimán y construyó uno de los primeros motores. También descubrió el fenómeno de la autoinducción, pero no publicó sus resultados. La unidad de la inductancia, el henry, es llamada así en su honor.

**Figura 32.1** Una vez cerrado el interruptor, la corriente produce un flujo magnético a través del área encerrada por la espira. Conforme la corriente aumenta hacia su valor de equilibrio, este flujo magnético cambia con el tiempo e induce una fem en la espira.



los parámetros asociados con una fuente física y si se utiliza el adjetivo *inducido* se describe aquellas fems y corrientes causadas por un campo magnético cambiante.

Considere un circuito formado por un interruptor, un resistor y una fuente de fem, como se muestra en la figura 32.1. El diagrama de circuito se representa en perspectiva para mostrar las orientaciones de algunas líneas de campo magnético debido a la corriente en el circuito. Cuando el interruptor se coloca en posición cerrada, la corriente no salta inmediatamente de cero a su valor máximo  $\mathcal{E}/R$ . Para describir este efecto se puede utilizar la ley de la inducción electromagnética de Faraday (ecuación 31.1). Conforme la corriente aumenta con el tiempo, el flujo magnético debido a esta corriente, a través de la espira del circuito, también aumenta. Este flujo creciente genera una fem inducida en el circuito. La dirección de la fem inducida es tal que causaría una corriente inducida en la espira (si ésta no llevase ya una corriente), que establecería un campo magnético opuesto al cambio en el campo magnético original. Por lo tanto, la dirección de la fem inducida es en sentido opuesto a la dirección de la fem de la batería, lo que da como resultado un incremento gradual, en vez de instantáneo, de la corriente hasta que alcance su valor de equilibrio final. Debido a la dirección de la fem inducida también se le conoce como *fuerza contraelectromotriz*, que es similar a la que se presenta en un motor, como se explicó en el capítulo anterior. Este efecto se llama **autoinducción** debido a que el flujo cambiante a través del circuito y la fem inducida resultante surge del circuito mismo. La fem  $\mathcal{E}_L$  establecida en este caso se llama **fem autoinducida**.

Para obtener una descripción cuantitativa de la autoinducción, recuerde la ley de Faraday, la cual dice que la fem inducida es igual al negativo de la rapidez de cambio en el tiempo del flujo magnético. Éste es proporcional al campo magnético que en su momento es proporcional a la corriente en el circuito. Debido a eso, **una fem autoinducida siempre es proporcional a la rapidez de cambio en el tiempo de la corriente**. Para cualquier espira de alambre, se puede escribir esta proporcionalidad como

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt} \tag{32.1}$$

donde  $L$  es una constante de proporcionalidad —llamada **inductancia** de la espira— que depende de la geometría de la espira y de otras características físicas. Si considera una bobina con espacios cerrados de  $N$  vueltas (un toroide o un solenoide ideal) que lleva una corriente  $I$  y contiene  $N$  vueltas, la ley de Faraday dice que  $\mathcal{E}_L = -N d\Phi_B/dt$ . Al combinar esta expresión con la ecuación 32.1 da:

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \tag{32.2}$$

donde se supone que pasa el mismo flujo magnético a través de cada una de las vueltas y  $L$  es la inductancia de toda la bobina. Por la ecuación 32.1, también se escribe la inductancia como la relación

$$L = -\frac{\mathcal{E}_L}{dI/dt} \tag{32.3}$$

Recuerde que la resistencia mide la oposición a la corriente ( $R = \Delta V/I$ ); en comparación, la ecuación 32.3 muestra que la inductancia es una medida de oposición a un *cambio* en la corriente.

Inductancia de una bobina  $N$  vueltas ▶

Inductancia ▶

La unidad del SI para la inductancia es el **henry** (H), el que, como se puede ver por la ecuación 32.3, equivale a 1 volt-segundo por cada ampere:  $1 \text{ H} = 1 \text{ V} \cdot \text{s}/\text{A}$ .

Como se muestra en el ejemplo 32.1, la inductancia de una bobina depende de su geometría. Esta dependencia es similar a la capacitancia de un capacitor que depende de la geometría de sus placas, como se vio en el capítulo 26. Calcular la inductancia puede ser bastante complicado en el caso de geometrías complejas; sin embargo, los ejemplos que se dan a continuación involucran situaciones simples para evaluar fácilmente sus inductancias.

**Pregunta rápida 32.1** Una bobina con una resistencia igual a cero tiene sus extremos señalados como  $a$  y  $b$ . El potencial en  $a$  es mayor que en  $b$ . ¿Cuál de los siguientes incisos es consistente con este caso? a) La corriente es constante y se dirige de  $a$  a  $b$ ; b) la corriente es constante y se dirige de  $b$  a  $a$ ; c) la corriente está en aumento y se dirige de  $a$  a  $b$ ; d) la corriente disminuye y se dirige de  $a$  a  $b$ ; e) la corriente aumenta y se dirige de  $b$  a  $a$ ; f) la corriente es decreciente y se dirige de  $b$  a  $a$ .

### EJEMPLO 32.1 Inductancia de un solenoide

Considere un solenoide con  $N$  vueltas y longitud  $\ell$  devanado uniformemente. Suponga que  $\ell$  es mucho mayor que el radio de los devanados y que el núcleo del solenoide es aire.

A) Encuentre la inductancia del solenoide.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Las líneas de campo magnético de cada vuelta del solenoide pasan a través de todas las vueltas, de modo que una fem inducida en cada bobina se opone al cambio en la corriente.

**Categorizar** Ya que el solenoide es largo, se pueden usar los resultados para un solenoide ideal obtenidos en el capítulo 30.

**Analizar** Encuentre el flujo magnético a través de cada vuelta de área  $A$  en el solenoide; use la expresión para el campo magnético de la ecuación 30.17:

$$\Phi_B = BA = \mu_0 nIA = \mu_0 \frac{N}{\ell} IA$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 32.2:

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A \quad (32.4)$$

B) Calcule la inductancia del solenoide si contiene 300 vueltas, su longitud es de 25.0 cm y su área de sección transversal es de  $4.00 \text{ cm}^2$ .

#### SOLUCIÓN

Sustituya los valores numéricos en la ecuación 32.4:

$$\begin{aligned} L &= (4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A}) \frac{(300)^2}{25.0 \times 10^{-2} \text{ m}} (4.00 \times 10^{-4} \text{ m}^2) \\ &= 1.81 \times 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{m}^2/\text{A} = 0.181 \text{ mH} \end{aligned}$$

C) Calcule la fem autoinducida en el solenoide si la corriente que porta disminuye a la relación de 50.0 A/s.

#### SOLUCIÓN

Sustituya  $dI/dt = -50.0 \text{ A/s}$  en la ecuación 32.1:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_L &= -L \frac{dI}{dt} = -(1.81 \times 10^{-4} \text{ H})(-50.0 \text{ A/s}) \\ &= 9.05 \text{ mV} \end{aligned}$$

**Finalizar** El resultado para el inciso A) muestra que  $L$  depende de la geometría y es proporcional al cuadrado del número de vueltas. Porque  $N = n\ell$ , el resultado también se puede expresar en la forma

$$L = \mu_0 \frac{(n\ell)^2}{\ell} A = \mu_0 n^2 A \ell = \mu_0 n^2 V \tag{32.5}$$

donde  $V = A\ell$  es el volumen interior del solenoide.

## 32.2 Circuitos RL

Si un circuito contiene una bobina, como un solenoide, la autoinductancia de ésta impide que la corriente en el circuito aumente o disminuya de manera instantánea. Un elemento de circuito con una gran inductancia se conoce como **inductor** y utiliza el símbolo de circuito . Siempre suponga que la inductancia del resto del circuito se puede ignorar en comparación con la del inductor, sin embargo. Recuerde que incluso un circuito sin una bobina tiene algo de inductancia que puede afectar su comportamiento.

Dado que la inductancia en un inductor resulta en una fuerza contraelectromotriz, **un inductor en un circuito se opone a los cambios en la corriente dentro de dicho circuito**. El inductor intenta mantener la corriente igual a como estaba antes de que ocurriera el cambio. Si el voltaje de la batería en el circuito se incrementa para aumentar la corriente, el inductor se opone a este cambio, y el aumento de corriente no es instantáneo. Si se reduce el voltaje de la batería, el inductor da como resultado una reducción lenta de la corriente en vez de una caída inmediata. Por lo tanto, el inductor hace que el circuito sea lento en reaccionar a los cambios en el voltaje.

Considere el circuito que se muestra en la figura 32.2, que contiene una batería de resistencia interna despreciable. Este circuito es un **circuito RL** porque los elementos conectados a la batería son un resistor y un inductor. Las líneas curvas en el interruptor  $S_2$  sugieren que este interruptor nunca se puede abrir; siempre está en  $a$  o en  $b$ . (Si el interruptor no se conecta ni a  $a$  ni a  $b$ , cualquier corriente en el circuito súbitamente se detiene.) Suponga que  $S_2$  se pone en  $a$  y que el interruptor  $S_1$  se abre para  $t < 0$  y luego se cierra en  $t = 0$ . La corriente en el circuito comienza a aumentar y en el inductor se induce una fuerza contraelectromotriz (ecuación 32.1) que se opone a la corriente creciente.

Con esto en mente, es posible aplicar la regla de la espira de Kirchhoff a este circuito, recorriendo el circuito en el sentido de las manecillas del reloj:

$$\mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \tag{32.6}$$

donde  $IR$  es la caída de voltaje a través del resistor. (Las reglas de Kirchhoff se desarrollan para circuitos con corrientes estables, pero también pueden aplicarse a un circuito en que la corriente está cambiando, si imagina que representan un circuito en un *instante* de tiempo.) Ahora debe buscar una solución para esta ecuación diferencial, una similar a la que aplicó para un circuito  $RC$  (véase la sección 28.4.)

Una solución matemática de la ecuación 32.6 representa la corriente en el circuito como una función del tiempo. Para determinar esta solución, cambie las variables, haciendo que  $x = (\mathcal{E}/R) - I$ , para que  $dx = -dI$ . Con estas sustituciones, escriba la ecuación 32.6 de la siguiente manera

$$x + \frac{L}{R} \frac{dx}{dt} = 0$$

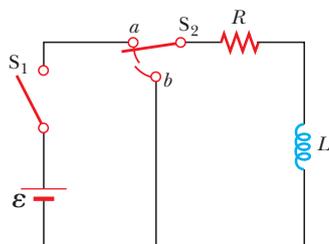
Reordenando e integrando esta última expresión, tiene

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{x}{x_0} = -\frac{R}{L} t$$

donde  $x_0$  es el valor de  $x$  en el tiempo  $t = 0$ . Si toma el antilogaritmo de este resultado, obtiene

$$x = x_0 e^{-Rt/L}$$



**Figura 32.2**

Circuito RL. Cuando el interruptor  $S_2$  está en la posición  $a$ , la batería está en el circuito. Cuando el interruptor  $S_1$  se cierra, la corriente aumenta y se induce una fem en el inductor que se opone a la corriente creciente. Cuando el interruptor está en la posición  $b$ , la batería ya no es parte del circuito y la corriente disminuye. El interruptor está diseñado de modo que nunca se abre, lo que haría que la corriente se detuviera.

Porque  $I = 0$  en  $t = 0$ , observe a partir de la definición de  $x$  que  $x_0 = \mathcal{E}/R$ . En consecuencia, esta última expresión es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}}{R} - I &= \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Rt/L} \\ I &= \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \end{aligned}$$

Esta expresión muestra cómo la corriente es afectada por el inductor. La corriente no aumenta de manera instantánea hasta su valor de equilibrio final cuando el interruptor se cierra, sino que aumenta de acuerdo con una función exponencial. Si retira la inductancia del circuito, al hacer que  $L$  tienda a cero, el término exponencial será cero y en este caso la corriente no depende del tiempo; en ausencia de la inductancia la corriente aumenta de manera instantánea a su valor de equilibrio final.

También escriba esta expresión como

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \tag{32.7}$$

donde la constante  $\tau$  es la **constante de tiempo** del circuito RL:

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{32.8}$$

Físicamente,  $\tau$  es el intervalo de tiempo necesario para que la corriente en el circuito alcance  $(1 - e^{-1}) = 0.632 = 63.2\%$  de su valor final  $\mathcal{E}/R$ . La constante de tiempo es un parámetro útil para comparar el tiempo de respuesta de diferentes circuitos.

La figura 32.3 representa la corriente en función del tiempo en el circuito RL. Observe que el valor de equilibrio de la corriente, que se presenta cuando  $t$  tiende a infinito, es igual a  $\mathcal{E}/R$ . Verifique esto con  $dI/dt$  igual a cero en la ecuación 32.6 y resolviendo en función de la corriente  $I$ . (En el equilibrio, el cambio en la corriente es igual a cero.) Por tanto, al inicio la corriente aumenta con mucha rapidez y después se acerca gradualmente al valor de equilibrio  $\mathcal{E}/R$  conforme  $t$  tiende a infinito.

Investigue la rapidez del cambio en el tiempo de la corriente. Tomando la primera derivada con el tiempo de la ecuación 32.7, da

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-t/\tau} \tag{32.9}$$

Este resultado muestra que la rapidez del cambio en el tiempo de la corriente es máximo (igual a  $\mathcal{E}/L$ ) en  $t = 0$  y disminuye exponencialmente hasta cero conforme  $t$  tiende a infinito (figura 32.4).

Ahora considere el circuito RL que se muestra en la figura 32.2. Suponga que el interruptor  $S_2$  se ha colocado en la posición  $a$  (y el interruptor  $S_1$  permanece cerrado) el suficiente tiempo para permitir que la corriente llegue a su valor de equilibrio  $\mathcal{E}/R$ . En este caso, el circuito queda descrito por la espira externa de la figura 32.2. Si  $S_2$  se mueve de  $a$  a  $b$ , el circuito queda descrito ahora sólo por la espira a la derecha de la figura 32.2. Por lo tanto, la batería ha sido eliminada del circuito. Con  $\mathcal{E} = 0$  en la ecuación 32.6 obtenemos

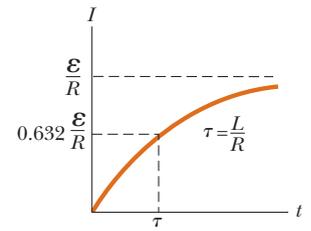
$$IR + L \frac{dI}{dt} = 0$$

Queda como un problema (problema 10) para demostrar que la solución de esta ecuación diferencial es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} = I_i e^{-t/\tau} \tag{32.10}$$

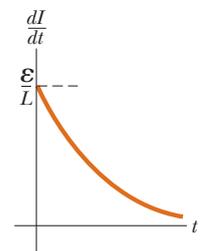
donde  $\mathcal{E}$  es la fem de la batería e  $I_i = \mathcal{E}/R$  es la corriente inicial en el instante en que el interruptor se coloca en  $b$ .

Si el circuito no incluyera un inductor, la corriente se reduciría de inmediato a cero al retirar la batería. Cuando el inductor está presente, se opone a la disminución de la



**Figura 32.3** Gráfica de la corriente en función del tiempo para el circuito RL que se muestra en la figura 32.2. El interruptor se cierra en  $t = 0$ , y la corriente aumenta hacia su valor máximo  $\mathcal{E}/R$ . La constante de tiempo  $\tau$  es el intervalo de tiempo necesario para que  $I$  alcance 63.2% de su valor máximo.

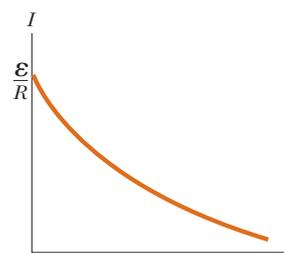
◀ Constante de tiempo de un circuito RL.



**Figura 32.4** Gráfica de  $dI/dt$  en función del tiempo para el circuito RL que se muestra en la figura 32.2. La relación de cambio en el tiempo de la corriente es máxima en  $t = 0$ , instante en el que se cierra el interruptor. La relación disminuye de manera exponencial con el tiempo conforme  $I$  aumenta hacia su valor máximo.

**Figura 32.5**

Corriente en función del tiempo para la espira del lado derecho del circuito que aparece en la figura 32.2. Para  $t < 0$ , el interruptor  $S_2$  está en la posición  $a$ . En  $t = 0$ , el interruptor está colocado en la posición  $b$ , y la corriente pasa por su valor máximo  $\mathcal{E}/R$ .



corriente y hace que ésta disminuya en forma exponencial. Una gráfica de la corriente en función del tiempo (figura 32.5) muestra que la corriente disminuye continuamente con el tiempo.

**Pregunta rápida 32.2** Considere el circuito de la figura 32.2, con  $S_1$  abierto y  $S_2$  en la posición  $a$ . Ahora se cierra el interruptor  $S_1$ . **i)** En el instante en que se cierra, ¿a través de cuál elemento de circuito el voltaje es igual a la fem de la batería? a) el resistor, b) el inductor, c) el inductor y el resistor. **ii)** Después de un tiempo considerable, ¿a través de cuál elemento de circuito el voltaje es igual a la fem de la batería? Elija entre las mismas respuestas.

**EJEMPLO 32.2** Constante de tiempo de un circuito  $RL$

Considere de nuevo el circuito de la figura 32.2. Suponga que los elementos del circuito tienen los siguientes valores:  $\mathcal{E} = 12.0 \text{ V}$ ,  $R = 6.00 \text{ } \Omega$  y  $L = 30.0 \text{ mH}$ .

A) Encuentre la constante de tiempo del circuito.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Debe comprender el comportamiento de este circuito a partir de la explicación de esta sección.

**Categorizar** Los resultados se evalúan con las ecuaciones desarrolladas en esta sección, de modo que este ejemplo es un problema de sustitución.

Evalúe la constante de tiempo a partir de la ecuación 32.8:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{30.0 \times 10^{-3} \text{ H}}{6.00 \text{ } \Omega} = 5.00 \text{ ms}$$

B) El interruptor  $S_2$  está en la posición  $a$  y el interruptor  $S_1$  se cierra en  $t = 0$ . Calcule la corriente en el circuito en  $t = 2.00 \text{ ms}$ .

**SOLUCIÓN**

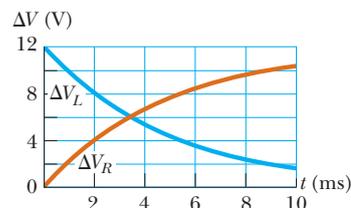
Evalúe la corriente en  $t = 2.00 \text{ ms}$  a partir de la ecuación 32.7:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{12.0 \text{ V}}{6.00 \text{ } \Omega} (1 - e^{-2.00 \text{ ms}/5.00 \text{ ms}}) = 2.00 \text{ A} (1 - e^{-0.400}) = 0.659 \text{ A}$$

C) Compare la diferencia de potencial a través del resistor con que cruza el inductor.

**SOLUCIÓN**

En el instante en que el interruptor se cierra, no hay corriente y por tanto no hay diferencia de potencial a través del resistor. En dicho instante, el voltaje de la batería aparece por completo a través del inductor en la forma de una fuerza contraelectromotriz de  $12.0 \text{ V}$  conforme el inductor intenta mantener la condición de corriente cero. (El extremo superior del inductor en la figura 32.2 está a un mayor potencial eléctrico que el extremo inferior.) Conforme pasa el tiempo, la fem a través del inductor disminuye y la corriente en el resistor (y por tanto el voltaje a través de él) aumenta como se muestra en la figura 32.6. La suma de los dos voltajes en todo momento es  $12.0 \text{ V}$ .



**Figura 32.6** (Ejemplo 32.2) Comportamiento en el tiempo de los voltajes a través del resistor y el inductor en la figura 32.2, dados los valores proporcionados en este ejemplo.

**¿Qué pasaría si?** En la figura 32.6, los voltajes a través del resistor y el inductor son iguales en 3.4 ms. ¿Y si usted quiere retrasar la condición en la que los voltajes sean iguales en cierto instante posterior, como  $t = 10.0$  ms? ¿Para lograr esto cuál parámetro,  $L$  o  $R$ , requeriría menos ajuste, en términos de un cambio porcentual?

**Respuesta** La figura 32.6 muestra que los voltajes son iguales cuando el voltaje a través del inductor. Ha caído a la mitad de su valor original. En consecuencia, el intervalo de tiempo requerido para que los voltajes sean iguales es la *vida media*  $t_{1/2}$  del decaimiento. La vida media se introdujo en la sección **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 28.10 para describir el decaimiento exponencial en los circuitos  $RC$ , donde  $t_{1/2} = 0.693\tau$ .

A partir de la vida media deseada de 10.0 ms, use el resultado del ejemplo 28.10 para encontrar la constante de tiempo del circuito:

$$\tau = \frac{t_{1/2}}{0.693} = \frac{10.0 \text{ ms}}{0.693} = 14.4 \text{ ms}$$

Mantenga  $L$  fija y encuentre el valor de  $R$  que dé esta constante de tiempo:

$$\tau = \frac{L}{R} \rightarrow R = \frac{L}{\tau} = \frac{30.0 \times 10^{-3} \text{ H}}{14.4 \text{ ms}} = 2.08 \Omega$$

Ahora mantenga  $R$  fija y encuentre el valor apropiado de  $L$ :

$$\tau = \frac{L}{R} \rightarrow L = \tau R = (14.4 \text{ ms})(6.00 \Omega) = 86.4 \times 10^{-3} \text{ H}$$

El cambio en  $R$  corresponde a una disminución de 65%, comparada con la resistencia inicial. ¡El cambio en  $L$  representa un aumento de 188% en inductancia! Por lo tanto, un ajuste porcentual mucho más pequeño en  $R$  puede lograr el efecto deseado del ajuste que se requeriría en  $L$ .

## 32.3 Energía en un campo magnético

Una batería en un circuito contiene un inductor que proporciona más energía que un circuito sin inductor. Parte de la energía suministrada por la batería aparece como energía interna en la resistencia del circuito en tanto que la energía restante es almacenada en el campo magnético del inductor. Si multiplica cada uno de los términos de la ecuación 32.6 por  $I$  y reordenando la expresión,

$$I\mathcal{E} = I^2R + LI \frac{dI}{dt} \quad (32.11)$$

Al reconocer  $I\mathcal{E}$  como la rapidez a la cual la energía se suministra por la batería e  $I^2R$  como la rapidez a la cual se entrega energía al resistor,  $LI(dI/dt)$  debe representar la rapidez a la cual se almacena energía en el inductor. Si  $U$  representa la energía almacenada en el inductor en cualquier instante, se puede escribir la relación  $dU/dt$  con la cual se almacena energía de la forma

$$\frac{dU}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

Para determinar la energía total almacenada en el inductor en cualquier instante, escriba esta expresión de la forma  $dU = LI dI$  e integre:

$$U = \int dU = \int_0^I LI dI = L \int_0^I I dI$$

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \quad (32.12)$$

donde  $L$  es constante y ha sido retirada de la integral. La ecuación 32.12 representa la energía almacenada en el campo magnético del inductor cuando la corriente es igual a  $I$ . Adverta que esta ecuación es similar en forma a la ecuación 26.11 para la energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor,  $U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$ . En cualquier caso, la energía es necesaria para establecer un campo.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 32.1

**En un capacitor, un resistor y un inductor se almacena energía de manera diferente**

En capacitores, inductores y resistores, los mecanismos de almacenaje de energía son diferentes. Un capacitor cargado almacena energía como energía potencial eléctrica. Un inductor almacena energía en lo que se podría llamar energía potencial magnética, cuando transporta corriente. La energía entregada a un resistor se transforma en energía interna.

◀ Energía almacenada en un inductor

También es posible determinar la densidad de energía de un campo magnético. Para hacerlo más simple, considere un solenoide cuya inductancia se conoce por la ecuación 32.5:

$$L = \mu_0 n^2 V$$

El campo magnético de un solenoide se proporciona por la ecuación 30.17:

$$B = \mu_0 nI$$

Al sustituir la expresión para  $L$  y para  $I = B/\mu_0 n$  en la ecuación 32.12, obtiene

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 V \left( \frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} V \tag{32.13}$$

La densidad de energía magnética, o la energía almacenada por cada unidad de volumen en el campo magnético del inductor, es igual a

Densidad de energía magnética ▶

$$u_B = \frac{U}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{32.14}$$

A pesar de que esta expresión se dedujo para el caso especial de un solenoide, aplica también para cualquier región del espacio en el que exista un campo magnético. Observe que la ecuación 32.14 es similar en forma a la ecuación 26.13 para la energía por cada unidad de volumen almacenada en un campo eléctrico,  $u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ . En ambos casos, la densidad de energía es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo.

**Pregunta rápida 32.3** Se realiza un experimento que requiere la densidad de energía más alta posible en el interior de un solenoide muy largo que transporta corriente. ¿Cuál de las siguientes opciones aumenta la densidad de energía? (Puede haber más de una elección correcta.) a) Aumentar el número de vueltas por cada unidad de longitud en el solenoide, b) incrementar el área de la sección transversal del solenoide, c) aumentar sólo la longitud del solenoide mientras se mantiene fijo el número de vueltas por cada unidad de longitud fija o d) incrementar la corriente en el solenoide.

**EJEMPLO 32.3** ¿Qué ocurre con la energía en el inductor?

Considere una vez más el circuito  $RL$  que se muestra en la figura 32.2, con el interruptor  $S_2$  en la posición  $a$  y a la corriente en su valor de estado estable. Cuando  $S_2$  se pasa a la posición  $b$ , la corriente en la espira derecha decae exponencialmente con el tiempo de acuerdo con la expresión  $I = I_i e^{-t/\tau}$ , donde  $I_i = \mathcal{E}/R$  es la corriente inicial en el circuito y  $\tau = L/R$  es la constante de tiempo. Demuestre que toda la energía inicialmente almacenada en el campo magnético del inductor aparece como energía interna en el resistor conforme la corriente decae a cero.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Antes de que  $S_2$  se ponga en  $b$ , desde la batería se entrega energía con una relación constante al resistor, y la energía se almacena en el campo magnético del inductor. Después de  $t = 0$ , cuando  $S_2$  está en la posición  $b$ , la batería ya no puede proporcionar energía y la energía se entrega sólo al resistor desde el inductor.

**Categorizar** La espira derecha del circuito se modela como un sistema aislado, de modo que la energía se transfiere entre componentes del sistema pero no sale del sistema.

**Analizar** La energía en el campo magnético del inductor en cualquier tiempo es  $U$ . La relación  $dU/dt$  con la que sale la energía del inductor y se entrega al resistor es igual a  $I^2 R$ , donde  $I$  es la corriente instantánea.

Sustituya la corriente conocida por la ecuación 32.10 en  $dU/dt = I^2 R$ :

$$\frac{dU}{dt} = I^2 R = (I_i e^{-Rt/L})^2 R = I_i^2 R e^{-2Rt/L}$$

Resuelva para  $dU$  e integre esta expresión sobre los límites  $t = 0$  a  $t \rightarrow \infty$ :

$$U = \int_0^\infty I_i^2 R e^{-2Rt/L} dt = I_i^2 R \int_0^\infty e^{-2Rt/L} dt$$

Se puede demostrar que el valor de la integral definida es  $L/2R$  (véase el problema 26). Use este resultado para evaluar  $U$ :

$$U = I_i^2 R \left( \frac{L}{2R} \right) = \frac{1}{2} L I_i^2$$

**Finalizar** Este resultado es igual a la energía inicial almacenada en el campo magnético del inductor, dado por la ecuación 32.12, como se debía comprobar.

**EJEMPLO 32.4****El cable coaxial**

Con frecuencia los cables coaxiales se usan para conectar dispositivos eléctricos como su sistema estereofónico y en la recepción de señales de los sistemas de televisión por cable. Modele un cable coaxial largo como dos cubiertas conductoras cilíndricas delgadas y concéntricas de radios  $a$  y  $b$  y longitud  $\ell$ , como en la figura 32.7. Las cubiertas conductoras portan la misma corriente  $I$  en direcciones opuestas. Calcule la inductancia  $L$  de este cable.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Considere la figura 32.7. Aunque no se tiene una bobina visible en esta geometría, imagine una rebanada radial delgada del cable coaxial tal como el rectángulo dorado claro en la figura 32.7. Si los conductores interior y exterior se conectan a los extremos del cable (arriba y abajo de la figura), esta rebanada representa una gran espira conductora. La corriente en la espira establece un campo magnético entre los conductores interior y exterior que pasa a través de esta espira. Si la corriente cambia, el campo magnético cambia y la fem inducida se opone al cambio original en la corriente en los conductores.

**Categorizar** Esta situación se clasifica como una en la que se debe regresar a la definición fundamental de inductancia, ecuación 32.2.

**Analizar** Debe encontrar el flujo magnético a través del rectángulo dorado claro de la figura 32.7. La ley de Ampère (vea la sección 30.3) dice que el campo magnético en la región entre las cubiertas se debe al conductor interior y que su magnitud es  $B = \mu_0 I / 2\pi r$ , donde  $r$  se mide desde el centro común de las cubiertas. El campo magnético es cero afuera de la cubierta exterior ( $r > b$ ) porque la corriente neta que pasa a través del área encerrada por una trayectoria circular que rodea el cable es cero; por tanto, a partir de la ley de Ampère,  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$ . El campo magnético es cero adentro de la cubierta interior porque la cubierta es hueca y no hay corriente presente dentro de un radio  $r < a$ .

El campo magnético es perpendicular al rectángulo dorado claro de longitud  $\ell$  y ancho  $b - a$ , la sección transversal de interés. Ya que el campo magnético varía con la posición radial a través de este rectángulo, debe usar el cálculo para encontrar el flujo magnético total.

Divida el rectángulo dorado claro en tiras de ancho  $dr$  como la tira más oscura en la figura 32.7. Evalúe el flujo magnético a través de tal tira:

$$\Phi_B = \int B dA = \int B \ell dr$$

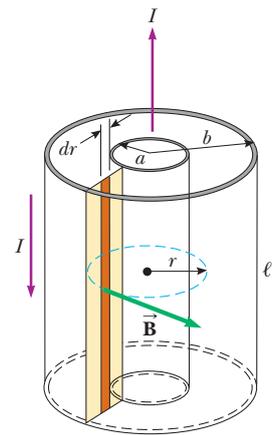
Sustituya para el campo magnético e integre en todo el rectángulo dorado claro:

$$\Phi_B = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \ell dr = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

Use la ecuación 32.2 para encontrar la inductancia del cable:

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

**Finalizar** La inductancia aumenta si  $\ell$  aumenta, si  $b$  aumenta o si  $a$  disminuye. Este resultado es consistente con la conceptualización: cualquiera de estos cambios aumenta el tamaño de la espira representada por la rebanada radial y a través de la que pasa el campo magnético, que aumenta la inductancia.



**Figura 32.7** (Ejemplo 32.4) Sección de un cable coaxial largo. Los conductores interior y exterior portan corrientes iguales en direcciones opuestas.

### 32.4 Inductancia mutua

Con frecuencia, el flujo magnético a través del área encerrada por un circuito varía con el tiempo debido a corrientes variables con el tiempo en circuitos cercanos. Esta situación induce una fem a través de un proceso conocido como *inductancia mutua*, denominada así porque depende de la interacción de dos circuitos.

Considere dos bobinas de alambre enrolladas apretadamente, como se muestra en la vista de la sección transversal de la figura 32.8. La corriente  $I_1$  de la bobina 1, la cual tiene  $N_1$  vueltas, produce un campo magnético. Parte de las líneas de este campo pasan a través de la bobina 2, la cual tiene  $N_2$  vueltas. El flujo magnético causado por la corriente de la bobina 1 y que pasa a través de la bobina 2 está representado por  $\Phi_{12}$ . En analogía con la ecuación 32.2, se puede identificar la **inductancia mutua**  $M_{12}$  de la bobina 2 respecto a la bobina 1:

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} \tag{32.15}$$

Definición de inductancia mutua

La inductancia mutua depende de la geometría de ambos circuitos y de su orientación mutua. Conforme aumenta la distancia de separación de los circuitos, la inductancia mutua disminuye, ya que el flujo que une los circuitos decrece.

Si la corriente  $I_1$  varía con el tiempo, según la ley de Faraday y la ecuación 32.15, la fem inducida por la bobina 1 en la bobina 2 es igual a

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -N_2 \frac{d}{dt} \left( \frac{M_{12} I_1}{N_2} \right) = -M_{12} \frac{dI_1}{dt} \tag{32.16}$$

En la explicación anterior, se supone que la corriente pasa por la bobina 1. También puede imaginar una corriente  $I_2$  en la bobina 2. La explicación precedente puede repetirse para demostrar que existe una inductancia mutua  $M_{21}$ . Si la corriente  $I_2$  varía con el tiempo, la fem inducida por la bobina 2 en la bobina 1 es igual a

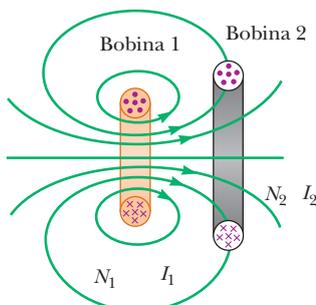
$$\mathcal{E}_1 = -M_{21} \frac{dI_2}{dt} \tag{32.17}$$

**En la inductancia mutua, la fem inducida en una bobina siempre es proporcional a la rapidez con la cual cambia la corriente de la otra bobina.** A pesar de que las constantes de proporcionalidad  $M_{12}$  y  $M_{21}$  fueron tratadas por separado, puede demostrarse que son iguales. Por lo tanto, con  $M_{12} = M_{21} = M$ , las ecuaciones 32.16 y 32.17 se convierten en

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt}$$

Estas dos ecuaciones son similares en forma a la ecuación 32.1 de la fem autoinducida  $\mathcal{E} = -L(dI/dt)$ . La unidad de la inductancia mutua es el henry.

**Pregunta rápida 32.4** En la figura 32.8, la bobina 1 se coloca más cerca de la bobina 2, conservando fija la orientación de ambas bobinas. Debido a este movimiento, la inductancia mutua de las dos bobinas a) aumenta, b) disminuye o c) no es afectada.

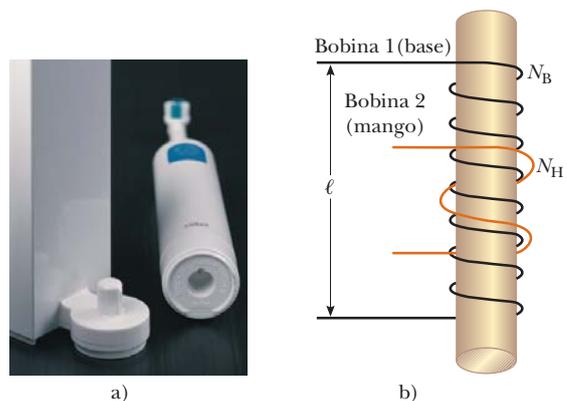


**Figura 32.8** Vista de la sección transversal de dos bobinas adyacentes. Una corriente en la bobina 1 establece un campo magnético y parte de las líneas del campo magnético pasan a través de la bobina 2.

#### EJEMPLO 32.5 Cargador de batería "inalámbrico"

Un cepillo dental eléctrico tiene una base diseñada para sostener el mango del cepillo dental cuando no está en uso. Como se muestra en la figura 32.9a, el mango tiene un orificio cilíndrico que encaja holgadamente sobre un cilindro coincidente en la base. Cuando el mango se coloca en la base, una corriente cambiante en un solenoide dentro del cilindro de la base induce una corriente en una bobina dentro del mango. Esta corriente inducida carga la batería en el mango.

**Figura 32.9** (Ejemplo 32.5) a) Este cepillo dental eléctrico usa la inducción mutua de solenoides como parte de su sistema cargador de batería. b) Una bobina de  $N_H$  vueltas enrollada alrededor del centro de un solenoide de  $N_B$  vueltas.



La base se puede modelar como un solenoide de longitud  $\ell$  con  $N_B$  vueltas (figura 32.9b), que porta una corriente  $I$  y tiene un área de sección transversal  $A$ . La bobina del mango contiene  $N_H$  vueltas y rodea por completo la bobina de la base. Encuentre la inductancia mutua del sistema.

### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Asegúrese de poder identificar las dos bobinas en la situación y entender que una corriente cambiante en una bobina induce una corriente en la segunda bobina.

**Categorizar** El resultado se evaluará usando los conceptos explicados en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 30.17 para expresar el campo magnético en el interior del solenoide de la base:

$$B = \mu_0 \frac{N_B}{\ell} I$$

Encuentre la inductancia mutua y note que el flujo magnético  $\Phi_{BH}$  a través de la bobina del mango causado por el campo magnético de la bobina de la base es  $BA$ :

$$M = \frac{N_H \Phi_{BH}}{I} = \frac{N_H BA}{I} = \mu_0 \frac{N_B N_H}{\ell} A$$

El cargado inalámbrico se usa en muchos otros dispositivos “sin cables”. Un ejemplo significativo es el cargado inductivo utilizado por algunos fabricantes de automóviles eléctricos que evitan el contacto directo metal a metal entre el automóvil y el aparato cargador.

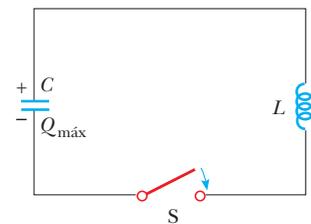
## 32.5 Oscilaciones en un circuito LC

Cuando se conecta un capacitor con un inductor, como se ilustra en la figura 32.10, la combinación es un **circuito LC**. Si el capacitor está inicialmente con carga y en ese momento se cierra el interruptor, tanto la corriente en el circuito como la carga en el capacitor oscilan entre valores máximos positivos y negativos. Si la resistencia del circuito es igual a cero, no existe transformación de energía en energía interna. En la explicación siguiente la resistencia del circuito es despreciable. También se supone una situación ideal donde no se radia energía hacia afuera del circuito. En el capítulo 34 se explica esta radiación.

Suponga que el capacitor tiene una carga inicial  $Q_{\text{máx}}$  (carga máxima) y que el interruptor se abre en  $t < 0$  y después se cierra en  $t = 0$ . Ahora investigue lo que sucede desde un punto de vista energético.

Cuando el capacitor está totalmente cargado, la energía  $U$  en el circuito se almacena en el campo eléctrico del capacitor y es igual a  $Q_{\text{máx}}^2/2C$  (ecuación 26.11). En este momento, la corriente en el circuito es igual a cero; debido a eso, no existe energía almacenada en el inductor. Después de que se cierre el interruptor, la rapidez a la que entran o salen las cargas de las placas del capacitor (que es también la rapidez a la cual cambia la carga en éste) es igual a la corriente en el circuito. Conforme el capacitor comienza a descargarse después de que se cierra el interruptor, la energía almacenada en su campo eléctrico disminuye. La descarga del capacitor representa una corriente en el circuito y alguna parte de la energía está ahora almacenada en el campo magnético del inductor. Por lo tanto, la energía ha sido transferida del campo eléctrico del capacitor al campo magnético del inductor. Cuando el capacitor está completamente descargado, no almacena energía. En este momento la corriente alcanza su valor máximo y toda la energía queda almacenada en el inductor. La corriente continúa en la misma dirección, disminuyendo en magnitud, finalmente con el capacitor cargándose de nuevo por completo, pero con la polaridad de sus placas ahora opuesta a la polaridad inicial. A lo anterior le sigue otra descarga, hasta que el circuito vuelve a su estado original de carga máxima,  $Q_{\text{máx}}$ , y la polaridad de la placa que aparece en la figura 32.10. La energía sigue oscilando entre el inductor y el capacitor.

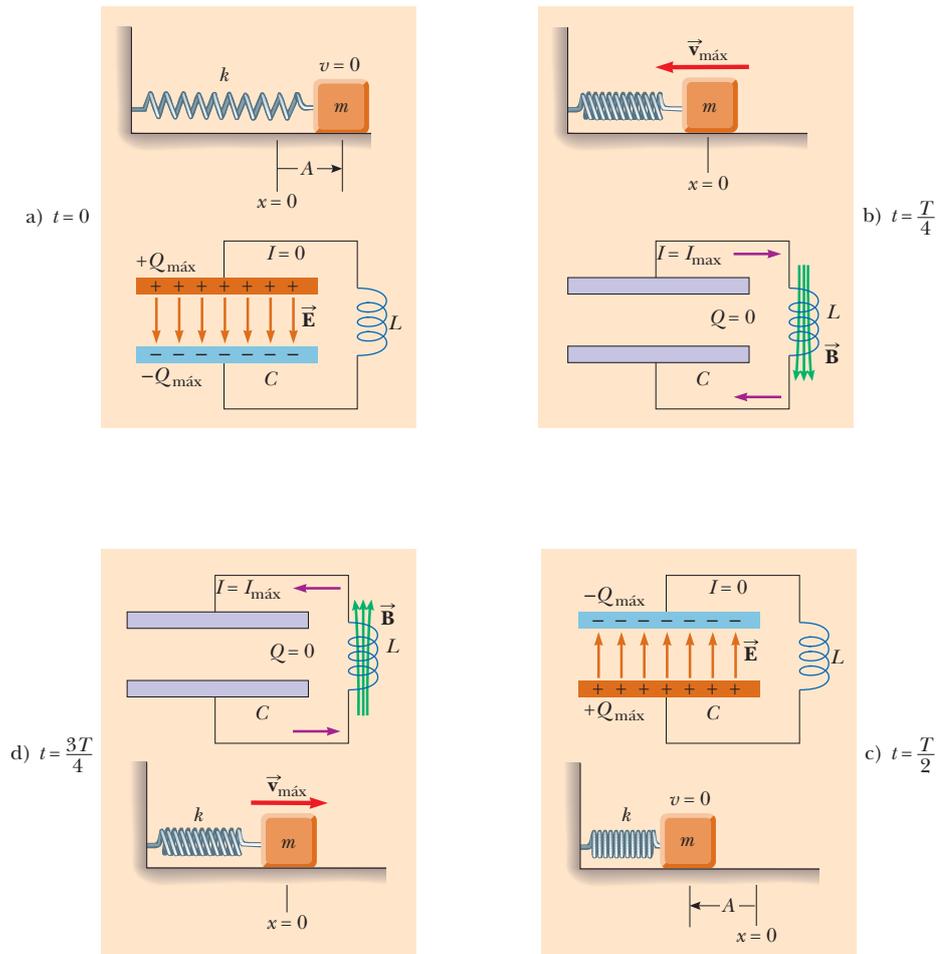
Las oscilaciones del circuito LC son electromagnéticamente similares a las oscilaciones mecánicas de un sistema bloque-resorte, que estudió en el capítulo 15. Mucho



**Figura 32.10** Circuito LC simple. El capacitor tiene una carga inicial  $Q_{\text{máx}}$ , y el interruptor se abre en  $t < 0$  y después se cierra en  $t = 0$ .

**Figura 32.11**

Transferencia de energía en un circuito  $LC$  sin resistencia y no radiante. El capacitor tiene una carga  $Q_{\text{máx}}$  en  $t = 0$ , en el instante en que el interruptor se cierra. La analogía mecánica de este circuito es un sistema bloque-resorte.



de lo que se explicó allí es aplicable a las oscilaciones  $LC$ . Por ejemplo, se investigó el efecto que tiene pulsar un oscilador mecánico con una fuerza externa, lo que nos llevó al fenómeno de la *resonancia*. El mismo fenómeno se observa en un circuito  $LC$ . (Véase la sección 33.7.)

En la figura 32.11 se muestra una representación de la transferencia de energía en un circuito  $LC$ . Como se mencionó, el comportamiento del circuito es análogo al del sistema oscilatorio bloque-resorte estudiado en el capítulo 15. La energía potencial  $\frac{1}{2}kx^2$  almacenada en un resorte estirado es análoga a la energía potencial  $\frac{Q_{\text{máx}}^2}{2C}$  almacenada en el capacitor. La energía cinética  $\frac{1}{2}mv^2$  del bloque en movimiento es análoga a la energía magnética  $\frac{1}{2}LI^2$  almacenada en el inductor, que requiere la presencia de cargas en movimiento. En la figura 32.11a, toda la energía se almacena como energía potencial eléctrica en el capacitor en  $t = 0$  (porque  $I = 0$ ), lo mismo que toda la energía en un sistema bloque-resorte inicialmente está almacenada como energía potencial en el resorte si se estira y libera en  $t = 0$ . En la figura 32.11b, toda la energía se almacena como energía magnética  $\frac{1}{2}LI_{\text{máx}}^2$  en el inductor, donde  $I_{\text{máx}}$  es la corriente máxima. Las figuras 32.11c y 32.11d muestran situaciones consecutivas de cuarto de ciclo en que la energía es toda eléctrica o toda magnética. En puntos intermedios, parte de la energía es eléctrica y parte es magnética.

Considere algún tiempo arbitrario  $t$  después de cerrar el interruptor, de forma que el capacitor tenga una carga  $Q < Q_{\text{máx}}$  y la corriente sea  $I < I_{\text{máx}}$ . En este momento, ambos elementos del circuito almacenan energía, pero la suma de las dos energías debe ser igual a la energía total inicial  $U$  en el capacitor totalmente cargado en  $t = 0$ :

Energía total almacenada en un circuito  $LC$  ▶

$$U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 \quad (32.18)$$

Ya que se ha supuesto que la resistencia del circuito es igual a cero y se ignora cualquier radiación electromagnética, la energía no se transforma en energía interna y tampoco se transfiere hacia el exterior del sistema del circuito. Debido a eso, *la energía total del sistema debe permanecer constante en el tiempo*. Se le describe a la energía del sistema constante matemáticamente mediante la colocación de  $dU/dt = 0$ . Por lo tanto, derivando la ecuación 32.18 respecto al tiempo mientras señala que  $Q$  e  $I$  varían con el tiempo, obtiene

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 \right) = \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = 0 \quad (32.19)$$

Es posible simplificar lo anterior a una ecuación diferencial de una variable si recuerda que la corriente en el circuito es igual a la rapidez a la cual cambia la carga en el capacitor:  $I = dQ/dt$ . De lo anterior, se sigue que  $dI/dt = d^2Q/dt^2$ . Si sustituye estas correspondencias en la ecuación 32.19, obtiene

$$\begin{aligned} \frac{Q}{C} + L \frac{d^2Q}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2Q}{dt^2} &= -\frac{1}{LC} Q \end{aligned} \quad (32.20)$$

Resuelva en función de  $Q$  señalando que esta expresión tiene la misma forma que las ecuaciones análogas 15.3 y 15.5 para un sistema bloque-resorte:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x = -\omega^2 x$$

donde  $k$  es la constante del resorte,  $m$  es la masa del bloque y  $\omega = \sqrt{k/m}$ . La solución de esta ecuación mecánica tiene la forma general (ecuación 15.6):

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

donde  $A$  es la amplitud del movimiento armónico simple (el valor máximo de  $x$ ),  $\omega$  es la frecuencia angular y  $\phi$  es la constante de fase; los valores de  $A$  y  $\phi$  dependen de las condiciones iniciales. Ya que la ecuación 32.20 es de la misma forma que la ecuación diferencial del oscilador armónico simple, tiene la solución

$$Q = Q_{\max} \cos(\omega t + \phi) \quad (32.21)$$

donde  $Q_{\max}$  es la carga máxima del capacitor y la frecuencia angular  $\omega$  es

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (32.22)$$

Advierta que la frecuencia angular de las oscilaciones depende solamente de la inductancia y capacitancia del circuito. La ecuación 32.22 proporciona la *frecuencia natural* de oscilación del circuito LC.

Ya que  $Q$  varía de manera sinusoidal con el tiempo, la corriente en el circuito también varía de la misma forma. Lo anterior es demostrable derivando la ecuación 32.21 en función del tiempo:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_{\max} \sin(\omega t + \phi) \quad (32.23)$$

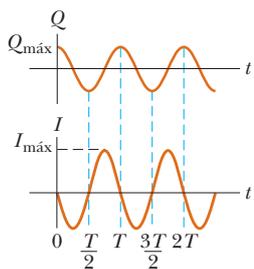
Para determinar el valor del ángulo de fase  $\phi$ , examine las condiciones iniciales, que en este caso requieren que en  $t = 0$ ,  $I = 0$  y  $Q = Q_{\max}$ . La colocación de  $I = 0$  en  $t = 0$  en la ecuación 32.23, da

$$0 = -\omega Q_{\max} \sin \phi$$

◀ Carga como función del tiempo para un circuito LC ideal

◀ Frecuencia angular de oscilación en un circuito LC

◀ Corriente como función del tiempo para un circuito LC ideal



**Figura 32.12** Gráficas de la carga con el tiempo y de la corriente en función del tiempo para un circuito LC sin resistencia y sin radiación. Observe que  $Q$  e  $I$  están  $90^\circ$  fuera de fase entre sí.

lo que demuestra que  $\phi = 0$ . Este valor de  $\phi$  también es consistente con la ecuación 32.21 y con la condición de que  $Q = Q_{\text{máx}}$  en  $t = 0$ . Por lo tanto, en este caso, las expresiones para  $Q$  e  $I$  son

$$Q = Q_{\text{máx}} \cos \omega t \tag{32.24}$$

$$I = -\omega Q_{\text{máx}} \text{sen } \omega t = -I_{\text{máx}} \text{sen } \omega t \tag{32.25}$$

En la figura 32.12 se muestran gráficas de  $Q$  en función de  $t$  y de  $I$  en función de  $t$ . Observe que la carga en el capacitor oscila entre los valores extremos  $Q_{\text{máx}}$  y  $-Q_{\text{máx}}$ , y que la corriente oscila entre  $I_{\text{máx}}$  y  $-I_{\text{máx}}$ . Además, la corriente está  $90^\circ$  fuera de fase con la carga. Es decir, cuando la carga está en un valor máximo, la corriente es igual a cero, y cuando la carga es cero, la corriente tiene su valor máximo.

De regreso con la explicación de energía del circuito LC. Sustituya las ecuaciones 32.24 y 32.25 en la ecuación 32.18, por lo que la energía total es igual a

$$U = U_C + U_L = \frac{Q_{\text{máx}}^2}{2C} \cos^2 \omega t + \frac{1}{2}LI_{\text{máx}}^2 \text{sen}^2 \omega t \tag{32.26}$$

Esta expresión contiene todas las características descritas cualitativamente al principio de esta sección. Muestra que la energía de un circuito LC oscila de manera continua entre energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor y energía almacenada en el campo magnético del inductor. Cuando la energía almacenada en el capacitor llega a su valor máximo,  $Q_{\text{máx}}^2/2C$ , la energía almacenada en el inductor es igual a cero. Cuando la energía en el inductor tiene su valor máximo,  $\frac{1}{2}LI_{\text{máx}}^2$ , la energía en el capacitor es igual a cero.

En la figura 32.13 se muestran gráficamente variaciones de  $U_C$  y  $U_L$  en función del tiempo. La suma de  $U_C + U_L$  es una constante y es igual a la energía total  $Q_{\text{máx}}^2/2C$ , o  $\frac{1}{2}LI_{\text{máx}}^2$ . Verificar analíticamente lo anterior es simple. Las amplitudes de las dos gráficas en la figura 32.13 deben ser iguales porque la energía máxima almacenada en el capacitor (cuando  $I = 0$ ) debe ser igual a la energía máxima almacenada en el inductor (cuando  $Q = 0$ ). Esta igualdad se expresa matemáticamente como

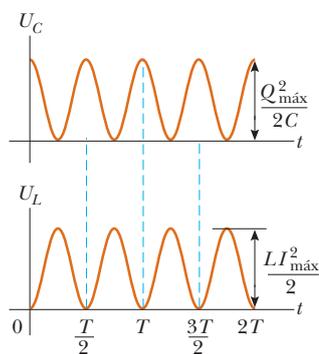
$$\frac{Q_{\text{máx}}^2}{2C} = \frac{LI_{\text{máx}}^2}{2}$$

Si utiliza esta expresión en la ecuación 32.26 para la energía total obtiene

$$U = \frac{Q_{\text{máx}}^2}{2C} (\cos^2 \omega t + \text{sen}^2 \omega t) = \frac{Q_{\text{máx}}^2}{2C} \tag{32.27}$$

ya que  $\cos^2 \omega t + \text{sen}^2 \omega t = 1$ .

En el caso ideal las oscilaciones persistirán en el circuito de manera indefinida; sin embargo, recuerde que la energía total  $U$  en el circuito permanece constante sólo si se ignoran las transferencias y transformaciones de energía. En circuitos reales siempre existirá alguna resistencia y, en consecuencia, parte de la energía se transformará en energía interna. Al principio de esta sección se mencionó que también se ignoraría la radiación del circuito. En realidad, en este tipo de circuito la radiación es inevitable y la energía total del circuito disminuye de manera continua como consecuencia de este proceso.



**Figura 32.13** Gráficas de  $U_C$  con el  $t$  y de  $U_L$  en función de  $t$  para un circuito LC sin resistencia y sin radiación. La suma de las dos curvas es una constante y es igual a la energía total almacenada en el circuito.

**Pregunta rápida 32.5** i) En un instante del tiempo durante las oscilaciones de un circuito LC, la corriente pasa por su valor máximo. En ese instante, ¿qué pasa con el voltaje a través del capacitor? a) Es diferente del correspondiente en las terminales del inductor, b) es igual a cero, c) alcanza su máximo valor, d) es imposible de determinar. En el instante en que hay oscilaciones en el circuito LC, la corriente es momentáneamente igual a cero. Para las mismas opciones, describa el voltaje a través del capacitor en este instante.

**EJEMPLO 32.6** Oscilaciones en un circuito LC

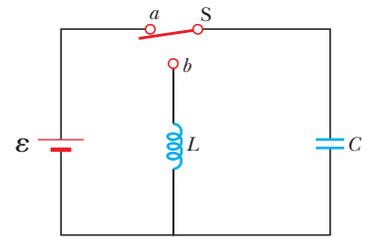
En la figura 32.14, la batería tiene una fem de 12.0 V, la inductancia es de 2.81 mH y la capacitancia es de 9.00 pF. El interruptor se pone en la posición *a* durante un tiempo considerable, de modo que el capacitor se carga. Luego el interruptor se pone en la posición *b*, retirando la batería del circuito y se conecta el capacitor directamente a través del inductor.

A) Hallar la frecuencia de oscilación del circuito.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Cuando el interruptor se pone en la posición *b*, la parte activa del circuito es la espira de la derecha, que es un circuito LC.

**Categorizar** Se aplican las ecuaciones desarrolladas en esta sección; este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.



**Figura 32.14** (Ejemplo 32.6) Primero el capacitor está completamente cargado con el interruptor colocado en la posición *a*. Luego el interruptor se pone en la posición *b* y la batería ya no está en el circuito.

Use la ecuación 32.22 para encontrar la frecuencia:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$f = \frac{1}{2\pi[(2.81 \times 10^{-3} \text{ H})(9.00 \times 10^{-12} \text{ F})]^{1/2}} = 1.00 \times 10^6 \text{ Hz}$$

B) ¿Cuáles son los valores máximos de carga en el capacitor y la corriente en el circuito?

**SOLUCIÓN**

Encuentre la carga inicial en el capacitor, que es igual a la carga máxima:

$$Q_{\text{máx}} = C \Delta V = (9.00 \times 10^{-12} \text{ F})(12.0 \text{ V}) = 1.08 \times 10^{-10} \text{ C}$$

Use la ecuación 32.25 para encontrar la corriente máxima a partir de la carga máxima:

$$I_{\text{máx}} = \omega Q_{\text{máx}} = 2\pi f Q_{\text{máx}} = (2\pi \times 10^6 \text{ s}^{-1})(1.08 \times 10^{-10} \text{ C}) = 6.79 \times 10^{-4} \text{ A}$$

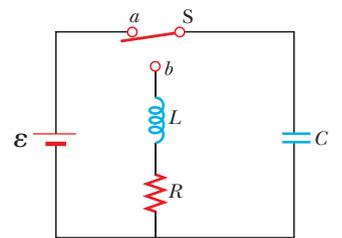
## 32.6 Circuito RLC

Ahora se dirige la atención a un circuito más realista que consiste en un resistor, un inductor y un capacitor conectados en serie, como se muestra en la figura 32.15. Se supone que la resistencia del resistor representa toda la resistencia en el circuito. Suponga que el interruptor está en la posición *a*, de modo que el capacitor tiene una carga inicial  $Q_{\text{máx}}$ . Ahora el interruptor se coloca en la posición *b*. Después de este instante, la energía total almacenada en el capacitor y en el inductor en cualquier tiempo se conoce por la ecuación 32.18. Sin embargo, esta energía total ya no es constante como lo era en el circuito LC, porque el resistor causa transformación a energía interna. (En esta explicación aún se ignora la radiación electromagnética del circuito.) Porque la rapidez de transformación de energía a energía interna dentro de un resistor es  $I^2R$ ,

$$\frac{dU}{dt} = -I^2R$$

donde el signo negativo significa que la energía  $U$  del circuito disminuye con el tiempo. Sustituyendo este resultado en la ecuación 32.19, da

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = -I^2R \tag{32.28}$$



**Figura 32.15** Circuito RLC en serie. El interruptor se pone en la posición *a* y el capacitor se carga. Luego el capacitor se coloca en la posición *b*.

Para convertir esta ecuación en una forma que permita comparar las oscilaciones eléctricas con su análogo mecánico, primero utilice el hecho de que  $I = dQ/dt$ , y mueva todos los términos al lado izquierdo de la igualdad para obtener

$$LI \frac{d^2Q}{dt^2} + I^2R + \frac{Q}{C}I = 0$$

Ahora divida todo entre  $I$ :

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + IR + \frac{Q}{C} = 0$$

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \tag{32.29}$$

El circuito  $RLC$  es similar al oscilador armónico amortiguado que se explicó en la sección 15.6 y que se ilustra en la figura 15.20. La ecuación del movimiento para un sistema bloque-resorte amortiguado es, de la ecuación 15.31,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{32.30}$$

Si compara las ecuaciones 32.29 y 32.30 en cualquier instante  $Q$  corresponde a la posición  $x$  del bloque,  $L$  a la masa  $m$  del bloque,  $R$  al coeficiente de amortiguación  $b$ , y  $C$  a  $1/k$ , donde  $k$  es la constante de fuerza del resorte. En la tabla 32.1 se muestran éstas y otras correspondencias.

**TABLA 32.1**

**Analogías entre sistemas eléctricos y mecánicos**

Circuito eléctrico		Sistema mecánico de una dimensión
Carga	$Q \leftrightarrow x$	Posición
Corriente	$I \leftrightarrow v_x$	Velocidad
Diferencia de potencial	$\Delta V \leftrightarrow F_x$	Fuerza
Resistencia	$R \leftrightarrow b$	Coefficiente de amortiguación viscosa
Capacitancia	$C \leftrightarrow 1/k$	( $k$ = constante del resorte)
Inductancia	$L \leftrightarrow m$	Masa
Corriente = derivada respecto al tiempo de la carga	$I = \frac{dQ}{dt} \leftrightarrow v_x = \frac{dx}{dt}$	Velocidad = derivada respecto al tiempo de posición
Rapidez de cambio de la corriente = segunda derivada respecto al tiempo de la carga	$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2} \leftrightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Aceleración = segunda derivada respecto al tiempo de posición
Energía en el inductor	$U_L = \frac{1}{2}LI^2 \leftrightarrow K = \frac{1}{2}mv^2$	Energía cinética de un objeto en movimiento
Energía en el capacitor	$U_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \leftrightarrow U = \frac{1}{2}kx^2$	Energía potencial almacenada en un resorte
Rapidez de pérdida de energía causada por la resistencia	$I^2R \leftrightarrow bv^2$	Rapidez de pérdida de energía causada por la fricción
Circuito $RLC$	$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \leftrightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$	Objeto amortiguado en un resorte

Porque la solución analítica de la ecuación 32.29 es muy compleja, se muestra sólo una descripción cualitativa del comportamiento del circuito. En el caso más simple, cuando  $R = 0$ , la ecuación 32.29 se reduce a un circuito  $LC$  simple, como era de esperarse, y la carga y la corriente oscilan sinusoidalmente con el transcurso del tiempo. Esto es equivalente a retirar todo amortiguamiento en el oscilador mecánico.

Cuando  $R$  es pequeña —una situación semejante a un amortiguamiento ligero en el oscilador mecánico— la solución de la ecuación 32.29 es

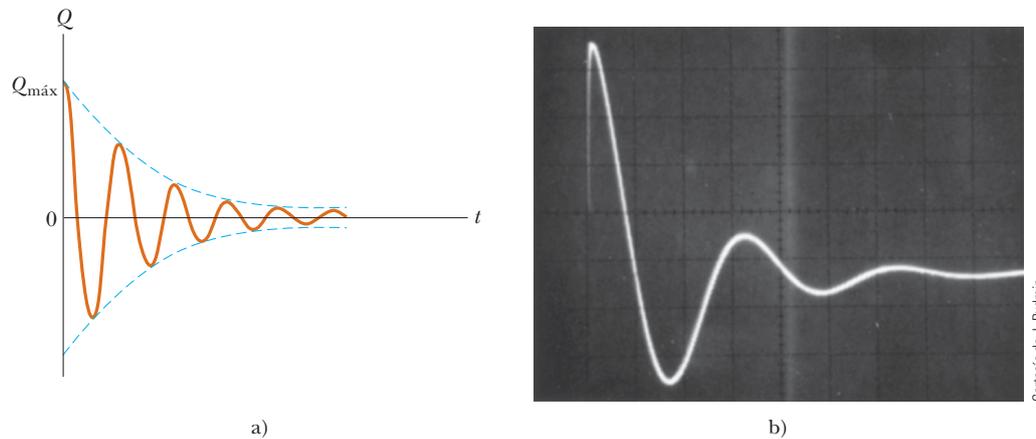
$$Q = Q_{\text{máx}} e^{-Rt/2L} \cos \omega_d t \quad (32.31)$$

donde  $\omega_d$  que es la frecuencia angular con el que oscila el circuito, se conoce por

$$\omega_d = \left[ \frac{1}{LC} - \left( \frac{R}{2L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (32.32)$$

Es decir, el valor de la carga en el capacitor se somete a una oscilación armónica amortiguada en analogía con el sistema bloque-resorte móvil en un medio viscoso. La ecuación 32.32 muestra que cuando  $R \ll \sqrt{4L/C}$  (de manera que el segundo término entre los paréntesis cuadrados es mucho menor que el primero), la frecuencia  $\omega_d$  del oscilador amortiguado se acerca al oscilador no amortiguado,  $1/\sqrt{LC}$ . Porque  $I = dQ/dt$ , se deduce que la corriente también se somete a una oscilación armónica amortiguada. En la figura 32.16a se muestra la gráfica de la carga con el tiempo para el oscilador amortiguado y en la figura 32.16b se muestra una línea de registro de un osciloscopio para un circuito real  $RLC$ . El valor máximo de  $Q$  disminuye después de cada oscilación, lo mismo que disminuye con el tiempo la amplitud de un sistema bloque-resorte.

Cuando considere valores de  $R$  más grandes, las oscilaciones se amortiguan con mayor rapidez; de hecho, existe un valor crítico de la resistencia  $R_c = \sqrt{4L/C}$  por encima del cual no se presentan oscilaciones. Se dice que un sistema con  $R = R_c$  está *críticamente amortiguado*. Cuando  $R$  excede a  $R_c$ , se dice que el sistema está *sobreamortiguado*.



**Figura 32.16**

- a) Carga en función del tiempo para un circuito  $RLC$  amortiguado. La carga disminuye en esta forma cuando  $R < \sqrt{4L/C}$ . La curva de  $Q$  en función de  $t$  representa gráficamente a la ecuación 32.31.  
 b) Patrón de osciloscopio que muestra el decaimiento en las oscilaciones de un circuito  $RLC$ .

## Resumen

### CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Cuando la corriente en una espira de alambre cambia con el tiempo, se induce una fem en la espira de acuerdo con la ley de Faraday. La **fem autoinducida** es

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (32.1)$$

donde  $L$  es la **inductancia** de la espira. La inductancia es una medida de cuánta oposición ofrece la espira a un cambio en la corriente en la espira. La inductancia tiene la unidad SI de **henry** (H), donde  $1 \text{ H} = 1 \text{ V} \cdot \text{s}/\text{A}$ .

La inductancia de cualquier bobina es

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \quad (32.2)$$

donde  $N$  es el número total de vueltas y  $\Phi_B$  es el flujo magnético a través de la bobina. La inductancia de un dispositivo depende de su geometría. Por ejemplo, la inductancia de un solenoide con núcleo de aire es

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A \quad (32.4)$$

donde  $\ell$  es la longitud del solenoide y  $A$  es el área de sección transversal.

Si un resistor y un inductor se conectan en serie a una batería de fem  $\mathcal{E}$  en el tiempo  $t = 0$ , la corriente en el circuito varía en el tiempo de acuerdo con la expresión

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (32.7)$$

donde  $\tau = L/R$  es la **constante de tiempo** del circuito  $RL$ . Si se sustituye la batería en el circuito por un alambre sin resistencia, la corriente decae exponencialmente con el tiempo de acuerdo con la expresión

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} \quad (32.10)$$

donde  $\mathcal{E}/R$  es la corriente inicial en el circuito.

La energía almacenada en el campo magnético de un inductor que porta una corriente  $I$  es

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \quad (32.12)$$

Esta energía es la contraparte magnética de la energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor cargado.

La densidad de energía en un punto donde el campo magnético es  $B$  es

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (32.14)$$

La **inductancia mutua** de un sistema de dos bobinas es

$$M_{12} = \frac{N_2\Phi_{12}}{I_1} = M_{21} = \frac{N_1\Phi_{21}}{I_2} = M \quad (32.15)$$

Esta inductancia mutua permite relacionar la fem inducida en una bobina con la fuente de corriente cambiante en una bobina cercana usando las correspondencias

$$\mathcal{E}_2 = -M_{12} \frac{dI_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M_{21} \frac{dI_2}{dt} \quad (32.16, 32.17)$$

En un circuito  $LC$  que tenga resistencia cero y no radie electromagnéticamente (una idealización), los valores de la carga en el capacitor y la corriente en el circuito varían sinusoidalmente en el tiempo con una frecuencia angular conocida por

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (32.22)$$

La energía en un circuito  $LC$  se transfiere de manera continua entre la energía almacenada en el capacitor y la energía almacenada en el inductor.

En un circuito  $RLC$  con pequeña resistencia, la carga en el capacitor varía con el tiempo de acuerdo con

$$Q = Q_{\text{máx}} e^{-Rt/2L} \cos \omega_d t \quad (32.31)$$

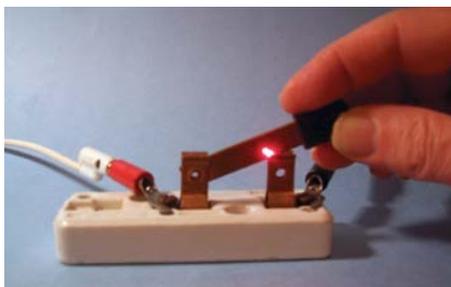
donde

$$\omega_d = \left[ \frac{1}{LC} - \left( \frac{R}{2L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (32.32)$$

# Preguntas

O Indica pregunta complementaria

1. La corriente en un circuito que contiene una bobina, un resistor y una batería ha llegado a un valor constante. ¿La bobina tiene inductancia? ¿Afecta la bobina el valor de la corriente?
2. ¿Qué parámetros afectan la inductancia de una bobina? ¿La inductancia de una bobina depende de la corriente en la bobina?
3. O Inicialmente, un inductor sin resistencia porta una corriente constante. Luego la corriente se lleva a un nuevo valor constante el doble de grande. Después de este cambio, ¿qué le sucede a la fem en el inductor? a) Es mayor que antes del cambio en un factor de 4. b) Es mayor por un factor de 2. c) Tiene el mismo valor distinto de cero. d) Continúa siendo cero. e) Disminuyó.
4. O Un alambre fino largo se enreda en una bobina con inductancia de 5 mH. La bobina se conecta a través de las terminales de una batería y la corriente se mide algunos segundos después de realizar la conexión. El alambre se desenrolla y enrolla de nuevo en una bobina diferente con  $L = 10$  mH. Esta segunda bobina se conecta a través de la misma batería y la corriente se mide de la misma forma. Comparada con la corriente en la primera bobina, ¿la corriente en la segunda bobina es a) cuatro veces mayor, b) dos veces mayor, c) no cambia, d) la mitad o e) un cuarto?
5. O Dos bobinas solenoidales, A y B, se enredan con iguales longitudes del mismo tipo de alambre. La longitud del eje de cada bobina es grande comparada con su diámetro. La longitud axial de la bobina A es el doble de la de B, y la bobina A tiene el doble de vueltas que la bobina B. ¿Cuál es la relación de la inductancia de la bobina A a la de la bobina B? a) 8, b) 4, c) 2, d) 1, e)  $\frac{1}{2}$ , f)  $\frac{1}{4}$ , g)  $\frac{1}{8}$ .
6. Un interruptor controla la corriente en un circuito que tiene una inductancia grande. ¿Hay mayor probabilidad de que se produzca una chispa (véase la figura P32.6) cuando el interruptor se abre, o cuando se cierra, o no tiene importancia? El arco eléctrico puede derretir y oxidar las superficies de los contactos, dando como resultado una gran resistividad de los contactos y una eventual destrucción del interruptor. Antes de que se inventaran los encendidos electrónicos, los puntos de contacto del distribuidor de un automóvil tenían que ser periódicamente reemplazados. Los interruptores en las redes de distribución de energía y los interruptores que controlan grandes motores, los generadores y los electroimanes pueden verse afectados por el arco y ser peligrosos de operar.



Alexandra Héder

Figura P32.6

7. O En la figura P32.7, el interruptor se deja en la posición *a* durante un largo intervalo de tiempo y luego rápidamente se coloca en la posición *b*. Clasifique las magnitudes de los vol-

jes a través de los cuatro elementos de circuito poco tiempo después, de mayor a menor.

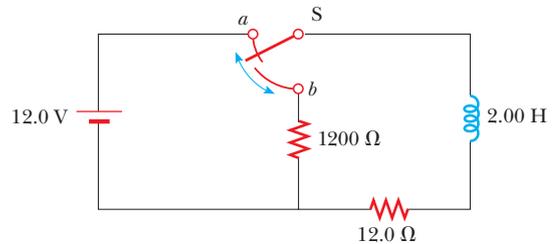


Figura P32.7

8. Considere los cuatro circuitos que se muestran en la figura P32.8, donde cada uno consiste en una batería, un interruptor, una lámpara, un resistor y un capacitor o un inductor. Suponga que el capacitor tiene una gran capacitancia y que el inductor tiene una gran inductancia mas no resistencia. La lámpara tiene alta eficiencia y brilla siempre que conduce corriente eléctrica. i) Describa lo que hace la lámpara en cada uno de los circuitos a), b), c) y d) después de que el interruptor se cierra. ii) Describa lo que hace la lámpara en cada circuito después de que, luego de haber estado cerrado un largo intervalo de tiempo, el interruptor se abre.

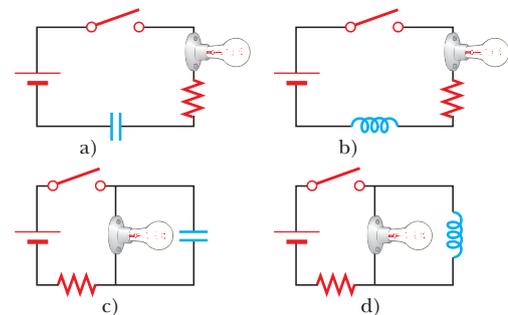


Figura P32.8

9. O *No haga esto, es peligroso e ilegal.* Suponga que un criminal quiere robar energía de la compañía eléctrica al colocar una bobina rectangular plana de alambre cerca de, pero sin tocar, un largo alambre horizontal recto en una línea de transmisión. El largo alambre recto porta una corriente que varía sinusoidalmente. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero? a) El método funciona mejor si la bobina está en un plano vertical que rodea al alambre recto. b) El método funciona mejor si la bobina está en un plano vertical con los dos lados largos del rectángulo paralelos al alambre largo e igualmente alejado de él. c) El método funciona mejor si la bobina y el alambre largo están en el mismo plano horizontal con un lado largo del rectángulo cerca del alambre. d) El método funciona para cualquier orientación de la bobina. e) El método no puede funcionar sin contacto entre la bobina y el alambre largo.
10. Considere esta tesis: "Joseph Henry, el primer físico profesional estadounidense, influyó en el cambio básico más reciente del punto de vista humano sobre el Universo, cuando descubrió

alrededor de 1830 la autoinducción durante unas vacaciones escolares en la Academia Albany. Antes de esto, se pensaba que el Universo estaba compuesto sólo por una sola cosa: materia. La energía que mantiene temporalmente la corriente después de haber retirado la batería a una bobina, por otro lado, no es energía que corresponda a alguna porción de materia. Se trata de energía que existe en el campo magnético sin masa que rodea a la bobina. Con el descubrimiento de Henry, la Naturaleza le descubrió al hombre que el Universo está constituido por campos, así como por materia.” Argumente a favor o en contra de esta afirmación. ¿Qué es lo que, desde su punto de vista, conforma al Universo?

11. **O** Si la corriente en un inductor se duplica, ¿en qué factor se multiplica la energía almacenada? a) 4, b) 2, c) 1, d)  $\frac{1}{2}$ , e)  $\frac{1}{4}$ .
12. **O** Un inductor solenoidal se volverá a diseñar para una tarjeta de circuito impreso. Para ahorrar peso, el número de vueltas se reduce a la mitad mientras las dimensiones geométricas se mantienen igual. ¿En cuánto cambia la corriente si la energía almacenada en el inductor debe permanecer igual? a) Debe ser cuatro veces mayor. b) Debe ser dos veces mayor. c) Debe ser mayor por un factor de  $\sqrt{2}$ . d) Debe dejarse igual. e) Debe ser la mitad. f) Ningún cambio en la corriente puede compensar la reducción en el número de vueltas.
13. Explique las similitudes entre la energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor cargado y la energía almacenada en el campo magnético de una bobina portadora de corriente.
14. El interruptor abierto en la figura P32.14 se cierra en  $t = 0$ . Antes de que el interruptor se cierre, el capacitor se descarga

y todas las corrientes son cero. Determine las corrientes en  $L$ ,  $C$  y  $R$  y las diferencias de potencial a través de  $L$ ,  $C$  y  $R$  a) en el instante después de que el interruptor se cierra y b) mucho después de que se cierra.

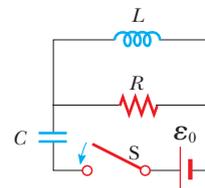


Figura P32.14

15. **O** Los centros de dos espiras circulares están separados por una distancia fija. i) ¿Para qué orientación relativa de las espiras su inductancia mutua es un máximo? a) coaxial y que se encuentren en planos paralelos, b) que se encuentren en el mismo plano, c) que se encuentren en planos perpendiculares, con el centro de uno en el eje del otro, d) La orientación no hace diferencia. ii) ¿Para qué orientación relativa su inductancia mutua es un mínimo? Elija entre las mismas posibilidades.
16. En el circuito  $LC$  que se muestra en la figura 32.10, la carga en el capacitor a veces es cero, pero en tales instantes la corriente en el circuito no es cero. ¿Cómo es posible este comportamiento?
17. ¿Cómo se puede saber si un circuito  $RLC$  está sobreamortiguado o subamortiguado?
18. ¿Un objeto puede ejercer fuerza sobre sí mismo? Cuando una bobina induce una fem en sí misma, ¿está ejerciendo una fuerza sobre sí misma?

## Problemas

### Sección 32.1 Autoinductancia

1. Un inductor de 2.00 H lleva una corriente estable de 0.500 A. Cuando se abre el interruptor en el circuito, después de 10.0 ms, la corriente es, efectivamente, igual a cero. ¿Cuál es la fem inducida promedio en el inductor durante este tiempo?
2. Un cable de teléfono enroscado forma una espira de 70 vueltas, con un diámetro de 1.30 cm y una longitud sin estirar de 60.0 cm. Determine la autoinductancia de un conductor en el cable sin estirar.
3. Un inductor de 10.0 mH conduce una corriente  $I = I_{\text{máx}} \sin \omega t$ , con  $I_{\text{máx}} = 5.00$  A y  $\omega/2\pi = 60.0$  Hz. ¿Cuál es la fem auto-inducida como una función de tiempo?
4. Una fem de 24.0 mV es inducida en una bobina de 500 vueltas en el instante en que la corriente es de 4.00 A y está cambiando con una rapidez de 10.0 A/s. ¿Cuál es el flujo magnético que a través de cada vuelta de la bobina?
5. Se tiene un inductor con forma de solenoide, de 420 vueltas, longitud de 16.0 cm y un área de sección transversal de

- 3.00 cm<sup>2</sup>. ¿Qué rapidez uniforme de disminución de la corriente a través del inductor induce una fem de 175  $\mu$ V?
6. La corriente de un inductor de 90.0 mH cambia con el transcurso del tiempo de la forma  $I = 1.00 t^2 - 6.00 t$  (en unidades del SI). Determine la magnitud de la fem inducida en a)  $t = 1.00$  s y b)  $t = 4.00$  s. c) ¿En qué momento será la fem igual a cero?
7. **●** Un solenoide con núcleo de aire, uniformemente devanado, con 450 vueltas, 15.0 mm de diámetro y 12.0 cm de longitud, porta una corriente de 40.0 mA. Calcule a) el campo magnético dentro del solenoide, b) el flujo magnético a través de cada vuelta y c) la inductancia del solenoide. d) **¿Qué pasaría si?** la corriente fuese diferente, ¿cuál de estas cantidades cambiaría?
8. Un toroide tiene un radio mayor  $R$  y un radio menor  $r$ , y está estrechamente enrollado con  $N$  vueltas de alambre, como se muestra en la figura P32.8. Si  $R \gg r$ , el campo magnético en la región encerrada por el alambre del toroide, de área de sección transversal  $A = \pi r^2$ , es esencialmente el mismo que

2 = intermedio; 3 = desafiante; ■ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

el campo magnético de un solenoide que ha sido doblado en un gran círculo de radio  $R$ . Modele con un campo uniforme de un solenoide largo y demuestre que la autoinductancia de dicho toroide es aproximadamente igual a

$$L \approx \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi R}$$

(Una expresión exacta de la inductancia de un toroide de sección transversal rectangular se deduce en el problema 57.)

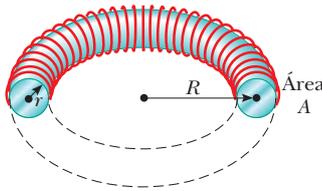


Figura P32.8

9. En un solenoide de inductancia  $L$ , una fem autoinducida cambia con el tiempo de la forma  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-kt}$ . Determine la carga total que pasa a través del solenoide, si existe una carga finita.

**Sección 32.2 Circuitos RL**

10. Demuestre que  $I = I_e e^{-t/\tau}$  es una solución de la ecuación diferencial

$$IR + L \frac{dI}{dt} = 0$$

donde  $I_e$  es la corriente en  $t = 0$  y  $\tau = L/R$ .

11. Una batería de 12.0 V está conectada en un circuito en serie que contiene un resistor de 10.0  $\Omega$  y un inductor de 2.00 H. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la corriente alcance a) 50.0% y b) 90.0% de su valor final?
12. ● En el circuito diagramado en la figura P32.12, sea  $\mathcal{E} = 12.0$  V y  $R = 24.0$   $\Omega$ . Suponga que el interruptor está abierto para  $t < 0$  y se cierra en  $t = 0$ . En un solo conjunto de ejes, bosqueje gráficas de la corriente en el circuito como función del tiempo para  $t \geq 0$ , si supone que a) la inductancia en el circuito es esencialmente cero, b) la inductancia tiene un valor intermedio y c) la inductancia tiene un valor muy grande. Etiquete los valores inicial y final de la corriente.

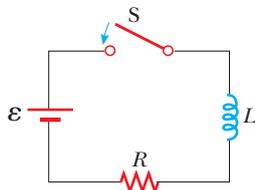


Figura P32.12 Problemas 12, 13, 14 y 15.

13. Considere el circuito de la figura P32.12, con los valores  $\mathcal{E} = 6.00$  V,  $L = 8.00$  mH, y  $R = 4.00$   $\Omega$ . a) ¿Cuál es la constante de tiempo inductiva del circuito? b) Calcule la corriente en el circuito 250  $\mu$ s después de que se cerró el interruptor. c) ¿Cuál es el valor de la corriente final en estado estable? d) ¿Cuánto tiempo le toma a la corriente alcanzar 80.0% de su valor máximo?

14. En el circuito que se muestra en la figura P32.12, suponga que  $L = 7.00$  H,  $R = 9.00$   $\Omega$  y  $\mathcal{E} = 120$  V. ¿Cuál es la fem autoinducida 0.200 s después de que se ha cerrado el interruptor?
15. Para el circuito RL que se muestra en la figura P32.12, sea la inductancia igual a 3.00 H, la resistencia igual a 8.00  $\Omega$ , y la fem de la batería igual a 36.0 V. a) Calcule la relación de la diferencia de potencial del resistor a la fem del inductor cuando la corriente es igual a 2.00 A. b) Calcule la fem a través del inductor cuando la corriente es igual a 4.50 A.
16. Una batería de 12.0 V está conectada en serie con un resistor y un inductor. El circuito tiene una constante de tiempo de 500  $\mu$ s, y la corriente máxima es de 200 mA. ¿Cuál es el valor de la inductancia del inductor?
17. Un inductor que tiene una inductancia de 15.0 H y una resistencia de 30.0  $\Omega$  está conectado a una batería de 100 V. ¿Cuál es la rapidez de incremento de la corriente a) en  $t = 0$  y b) en  $t = 1.50$  s?
18. El interruptor de la figura P32.18 está abierto durante  $t < 0$  y después se cierra en  $t = 0$ . Determine la corriente en el inductor y la corriente en el interruptor como funciones de tiempos posteriores.

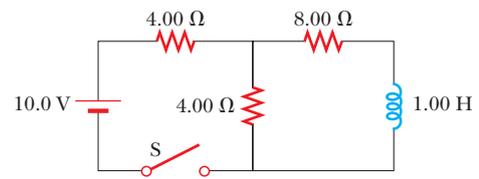


Figura P32.18 Problemas 18 y 52.

19. Un circuito RL en serie con  $L = 3.00$  H y un circuito RC en serie con  $C = 3.00$   $\mu$ F tienen idénticas constantes de tiempo. Si los dos circuitos contienen la misma resistencia  $R$ , a) ¿cuál es el valor de  $R$ ? y b) ¿cuál es el valor de la constante de tiempo?
20. Un pulso de corriente es alimentado al circuito parcial que se muestra en la figura P32.20. La corriente comienza desde cero y se convierte después en 10.0 A entre  $t = 0$  y  $t = 200$   $\mu$ s, y a continuación vuelve a ser igual a cero. Determine la corriente en el inductor como una función del tiempo.

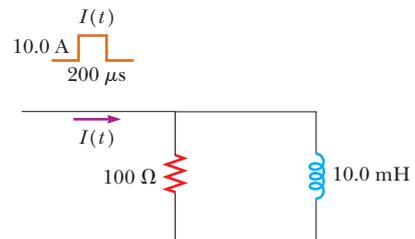


Figura P32.20

21. Un inductor de 140 mH y un resistor de 4.90  $\Omega$  están conectados con un interruptor a una batería de 6.00 V, como se muestra en la figura P32.21. a) Si el interruptor se coloca en a (conectando la batería), ¿cuánto tiempo transcorre antes de que la corriente alcance 220 mA? b) ¿Cuál es la corriente en el inductor 10.0 s después de que el interruptor se cierra? c) En este caso se pasa rápidamente el interruptor de a a b. ¿Cuánto

2 = intermedio; 3 = desafiante; ■ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

tiempo transcurre antes de que la corriente disminuya hasta 160 mA?

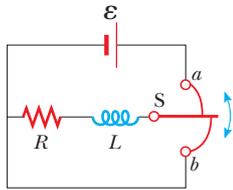


Figura P32.21

22. ● Considere dos inductores ideales  $L_1$  y  $L_2$  que tienen una resistencia interna igual a *cero* y muy separados uno del otro, de forma que sus campos magnéticos no influyen entre sí. a) Si los inductores están conectados en serie, demuestre que son equivalentes a un solo inductor ideal que tenga  $L_{\text{eq}} = L_1 + L_2$ . b) Si los dos inductores están conectados en paralelo, demuestre que son equivalentes a un solo inductor ideal que tenga  $1/L_{\text{eq}} = 1/L_1 + 1/L_2$ . c) **¿Qué pasaría si?** Ahora considere dos inductores  $L_1$  y  $L_2$  que tengan, respectivamente, resistencias internas  $R_1$  y  $R_2$  diferentes de *cero*. Suponga que incluso se encuentran alejadas una de la otra, de manera que su inductancia mutua sea igual a *cero*. Si los inductores están conectados en serie, demuestre que son equivalentes a un solo inductor que tenga  $L_{\text{eq}} = L_1 + L_2$  y  $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2$ . d) Si estos mismos inductores estuvieran conectados en paralelo, ¿es cierto que son equivalentes a un solo inductor ideal que tenga  $1/L_{\text{eq}} = 1/L_1 + 1/L_2$  y  $1/R_{\text{eq}} = 1/R_1 + 1/R_2$ ? Explique su respuesta.

**Sección 32.3 Energía en un campo magnético**

23. Un solenoide de 68 vueltas con núcleo de aire tiene 8.00 cm de largo y un diámetro de 1.20 cm. ¿Cuánta energía se almacena en su campo magnético cuando conduce una corriente de 0.770 A?
24. El campo magnético en el interior de un solenoide superconductor es de 4.50 T. El solenoide tiene un diámetro interno de 6.20 cm y una longitud de 26.0 cm. Determine a) la densidad de energía magnética en el campo y b) la energía almacenada en el campo magnético en el interior del solenoide.
25. En un día despejado, en cierto lugar, existe un campo eléctrico vertical de 100 V/m cerca de la superficie de la Tierra. En el mismo lugar, el campo magnético de la Tierra tiene una magnitud de  $0.500 \times 10^{-4}$  T. Calcule las densidades de energía de ambos campos.
26. Complete el cálculo del ejemplo 32.3 probando que

$$\int_0^{\infty} e^{-2Rt/L} dt = \frac{L}{2R}$$

27. ● Una bobina plana de alambre tiene una inductancia de 40.0 mH y una resistencia de 5.00 Ω. Está conectada a una batería de 22.0 V en el instante  $t = 0$ . Considere el momento cuando la corriente es de 3.00 A. a) ¿Con qué rapidez entrega energía la batería? b) ¿Cuál es la potencia entregada al resistor? c) ¿Con qué rapidez se almacena energía en el campo magnético de la bobina? d) ¿Cuál es la correspondencia entre estos tres valores de potencia? ¿Esta correspondencia también es verdadera en otros instantes? Explique la correspondencia en el momento inmediatamente después de  $t = 0$  y en un momento muchos segundos más tarde.
28. Una batería de 10.0 V, un resistor de 5.00 Ω y un inductor de 10.0 H están conectados en serie. Después de que la corriente

en el circuito alcance su valor máximo, calcule a) la potencia que suministra la batería, b) la potencia que se entrega al resistor, c) la potencia que se entrega al inductor y d) la energía almacenada en el campo magnético del inductor.

29. Suponga que la magnitud del campo magnético en el exterior de una esfera de radio  $R$  es  $B = B_0(R/r)^2$ , donde  $B_0$  es una constante. Determine la energía total almacenada en el campo magnético en el exterior de la esfera y evalúe el resultado con  $B_0 = 5.00 \times 10^{-5}$  T y  $R = 6.00 \times 10^6$  m, valores apropiados para el campo magnético de la Tierra.

**Sección 32.4 Inductancia mutua**

30. Dos bobinas están muy cerca una de la otra. La primera tiene una corriente que varía con el tiempo, conocida por  $I(t) = (5.00 \text{ A}) e^{-0.0250t} \text{ sen}(377t)$ . En  $t = 0.800$  s, la fem medida en la segunda bobina es  $-3.20$  V. ¿Cuál es la inductancia mutua en ambas bobinas?
31. Dos bobinas sujetas en posiciones fijas tienen una inductancia mutua de 100 μH. ¿Cuál es la fem máxima que se registra en una de ellas cuando una corriente sinusoidal conocida por  $I(t) = (10.0 \text{ A}) \text{ sen}(1000t)$  en la otra bobina?
32. En un tablero de circuito impreso, un conductor recto relativamente largo y una espira rectangular conductora yacen en el mismo plano, como se muestra en la figura P31.8 capítulo 31. Si  $h = 0.400$  mm,  $w = 1.30$  mm y  $L = 2.70$  mm, determine la inductancia mutua.
33. Dos solenoides A y B, colocados uno cerca del otro y comparando el mismo eje cilíndrico, tienen 400 y 700 vueltas, respectivamente. En la bobina A una corriente de 3.50 A produce un flujo promedio de 300 μWb por cada vuelta de A y un flujo de 90.0 μWb por cada vuelta de B. a) Calcule la inductancia mutua de los dos solenoides. b) ¿Cuál es la inductancia de A? c) ¿Cuál es la fem inducida en B cuando la corriente en A aumenta con una rapidez de 0.500 A/s?
34. ● Un solenoide tiene  $N_1$  vueltas, radio  $R_1$  y longitud  $\ell$ . Es tan largo que su campo magnético es uniforme casi en todas partes dentro de él y casi *cero* afuera. Un segundo solenoide tiene  $N_2$  vueltas, radio  $R_2 < R_1$  y la misma longitud. Se encuentra dentro del primer solenoide, con sus ejes paralelos. a) Suponga que el solenoide 1 conduce corriente variable  $I$ . Calcule la inductancia mutua que caracteriza la fem inducida en el solenoide 2. b) Ahora suponga que el solenoide 2 conduce corriente  $I$ . Calcule la inductancia mutua a la que es proporcional la fem en el solenoide 1. c) Establezca cómo se comparan mutuamente los resultados de los incisos a) y b).
35. Una bobina grande de radio  $R_1$  y con  $N_1$  vueltas está colocada coaxialmente con una bobina pequeña de radio  $R_2$  y con  $N_2$  vueltas. Los centros de las bobinas están separados una distancia  $x$  mucho mayor que  $R_2$ . ¿Cuál es la inductancia mutua de las bobinas? *Sugerencia:* John von Neumann demostró que la misma respuesta se obtiene si se considera el flujo a través de la primera bobina del campo magnético como si se hubiera producido por la segunda bobina, o si se considera el flujo a través de la segunda bobina del campo magnético como si la hubiera producido la primera. En este problema es fácil calcular el flujo a través de la bobina más pequeña, pero es difícil calcular el flujo a través de la otra, porque para ello tendría que conocerse el campo magnético en algún lugar lejos del eje.
36. Dos inductores con inductancias  $L_1$  y  $L_2$  están conectados en paralelo, como se muestra en la figura P32.36a. La

2 = intermedio; 3 = desafiante; ■ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

inductancia mutua entre los inductores es  $M$ . Determine la inductancia equivalente  $L_{eq}$  para el sistema (figura P32.36b).

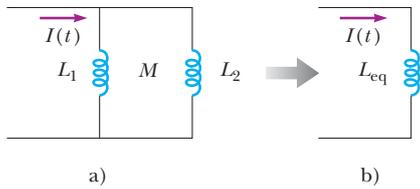


Figura P32.36

**Sección 32.5 Oscilaciones en un circuito LC**

- 37. Un capacitor de  $1.00 \mu\text{F}$  es cargado por una fuente de energía de  $40.0 \text{ V}$ . Después se descarga a través de un inductor de  $10.0 \text{ mH}$ . Determine la corriente máxima en las oscilaciones resultantes.
- 38. Un circuito  $LC$  está constituido por un inductor de  $20.0 \text{ mH}$  y un capacitor de  $0.500 \mu\text{F}$ . Si la corriente máxima instantánea es de  $0.100 \text{ A}$ , ¿cuál es la mayor diferencia de potencial en los extremos del capacitor?
- 39. En el circuito de la figura P32.39, la fem de la batería es de  $50.0 \text{ V}$ , la resistencia de  $250 \Omega$  y la capacitancia de  $0.500 \mu\text{F}$ . El interruptor  $S$  se cierra durante un largo periodo a través del capacitor y mide una diferencia de potencial de cero. Después de que se abre el interruptor, la diferencia de potencial en las terminales del capacitor alcanza un valor máximo de  $150 \text{ V}$ . ¿Cuál es el valor de la inductancia?

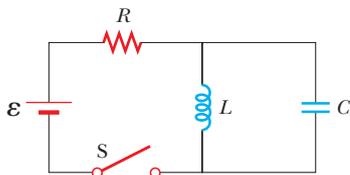


Figura 32.39

- 40. Un circuito  $LC$  como el que se muestra en la figura 32.10 contiene un inductor de  $82.0 \text{ mH}$  y un capacitor de  $17.0 \mu\text{F}$ , inicialmente con una carga de  $180 \mu\text{C}$ . En  $t < 0$  se abre el interruptor y después se cierra en  $t = 0$ . a) Determine la frecuencia (en hertz) de las oscilaciones resultantes. En  $t = 1.00 \text{ ms}$ , determine b) la carga en el capacitor y c) la corriente en el circuito.
- 41. Para la sintonización de un radioteléfono en un barco se utiliza una inductancia fija  $L = 1.05 \mu\text{H}$  en serie con un capacitor variable. ¿Qué capacitancia sintoniza el circuito a la señal proveniente de un transmisor que emite señales a  $6.30 \text{ MHz}$ ?
- 42. El interruptor de la figura 32.42 está conectado al punto  $a$  durante mucho tiempo. Después de que el interruptor se pasa al punto  $b$ , ¿cuál es a) la frecuencia de oscilación del circuito  $LC$ , b) la carga máxima que aparece en el capacitor, c) la co-

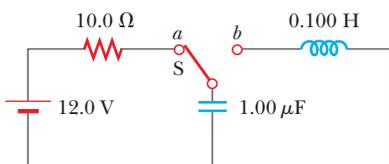


Figura 32.42

rriente máxima en el inductor y d) la energía total que posee el circuito en  $t = 3.00 \text{ s}$ ?

- 43. Un circuito  $LC$  como el de la figura 32.10 está constituido por un inductor de  $3.30 \text{ H}$  y un capacitor de  $840 \text{ pF}$ , inicialmente con una carga de  $105 \mu\text{C}$ . El interruptor se abre en  $t < 0$  y después se cierra en  $t = 0$ . Calcule las siguientes cantidades en  $t = 2.00 \text{ ms}$ : a) la energía almacenada en el capacitor, b) la energía almacenada en el inductor y c) la energía total del circuito.

**Sección 32.6 Circuito RLC**

- 44. En la figura 32.15, supongamos que  $R = 7.60 \Omega$ ,  $L = 2.20 \text{ mH}$  y  $C = 1.80 \mu\text{F}$ . a) Calcule la frecuencia de la oscilación amortiguada del circuito. b) ¿Cuál es la resistencia crítica?
- 45. Considere un circuito  $LC$  en el que  $L = 500 \text{ mH}$  y  $C = 0.100 \mu\text{F}$ . a) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia  $\omega_0$ ? b) Si en el circuito se introduce una resistencia de  $1.00 \text{ k}\Omega$ , ¿cuál será la frecuencia de las oscilaciones (amortiguadas)?, y c) ¿cuál es el porcentaje de diferencia entre ambas frecuencias?
- 46. Demuestre que la ecuación 32.28 se trata de la regla de las espiras de Kirchhoff aplicada al circuito de la figura 32.15.
- 47. Se inician oscilaciones eléctricas en un circuito en serie que contiene una capacitancia  $C$ , una inductancia  $L$  y una resistencia  $R$ . a) Si  $R \ll \sqrt{4L/C}$  (amortiguación débil), ¿cuánto tiempo pasará antes de que la amplitud de la oscilación de la corriente disminuya a  $50.0\%$  de su valor inicial? b) ¿Cuánto tiempo tarda en disminuir la energía a  $50.0\%$  de su valor inicial?

**Problemas adicionales**

- 48. **Problema de repaso.** Este problema extiende el razonamiento de la sección 26.4, el problema 26.29, el problema 33.30 y la sección 32.3. a) Considere un capacitor con vacío entre sus placas grandes, cercanas, paralelas y con cargas opuestas. Demuestre que la fuerza en una placa se explica al considerar que el campo eléctrico entre placas ejerce una "presión negativa" igual a la densidad de energía del campo eléctrico. b) Considere dos hojas planas infinitas que llevan corrientes eléctricas en direcciones opuestas con densidades lineales  $J_s$  de corriente iguales. Calcule la fuerza por cada área que actúa sobre una hoja debida al campo magnético, de magnitud  $\mu_0 J_s / 2$  producido por la otra hoja. c) Calcule el campo magnético neto entre las hojas y el campo exterior al volumen entre ellas. d) Calcule la densidad de energía en el campo magnético entre las hojas. e) Demuestre que la fuerza sobre una hoja se explica si se considera que el campo magnético entre las hojas ejerce una presión positiva igual a su densidad de energía. Este resultado de la presión magnética es aplicable a todas las configuraciones de corriente, no sólo a hojas de corriente.

- 49. Un inductor de  $1.00 \text{ mH}$  y un capacitor de  $1.00 \mu\text{F}$  están conectados en serie. La corriente en el circuito está expresada por  $I = 20.0 t$ , donde  $t$  está en segundos e  $I$  en amperes. Inicialmente, el capacitor no tiene carga. Determine a) el voltaje a través del inductor como una función del tiempo, b) el voltaje a través del capacitor como una función del tiempo y c) el instante en que la energía almacenada en el capacitor excede por vez primera la del inductor.

- 50. Un inductor que tiene una inductancia  $L$  y un capacitor con una capacitancia  $C$  están conectados en serie. La corriente en el circuito aumenta linealmente con el tiempo, como se describe en  $I = Kt$ , siendo  $K$  una constante. El capacitor está

2 = intermedio; 3 = desafiante; ■ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

inicialmente descargado. Determine a) el voltaje a través del inductor como una función del tiempo, b) el voltaje a través del capacitor como una función del tiempo y c) el instante en que la energía almacenada en el capacitor excede por vez primera la del inductor.

51. Un capacitor en un circuito LC en serie tiene una carga inicial  $Q$  y está descargándose. Determine, en función de  $L$  y  $C$ , el flujo a través de cada una de las  $N$  vueltas de la bobina, cuando la carga sobre el capacitor es igual a  $Q/2$ .
52. ● En el circuito diagramado en la figura P32.18, suponga que el interruptor se cerró durante un largo intervalo de tiempo y se abrió en  $t = 0$ . a) Antes de que el interruptor se abra, ¿el inductor se comporta como un circuito abierto, como un cortocircuito, un resistor de alguna resistencia particular o ninguna de estas opciones? ¿Qué corriente porta el inductor? b) ¿Cuánta energía se almacena en el inductor para  $t < 0$ ? c) Después de que el interruptor se abre, ¿qué ocurre con la energía previamente almacenada en el inductor? d) Bosquee una gráfica de la corriente en el inductor para  $t \geq 0$ . Etiquete los valores inicial y final y la constante de tiempo.
53. ● En el momento  $t = 0$ , una batería de 24.0 V se conecta a una bobina de 5.00 mH y un resistor de 6.00  $\Omega$ . a) Según esto inmediatamente, ¿cómo se compara la diferencia de potencial a través del resistor, con la fem a través de la bobina? b) Responda la misma pregunta acerca del circuito muchos segundos después. c) ¿Hay un instante en el que estos dos voltajes son iguales en magnitud? Si es así, ¿cuándo? ¿Hay más de uno de tales instantes? d) Después de que una corriente de 4.00 A se establece en el resistor y la bobina, la batería súbitamente se sustituye por un cortocircuito. Responda de nuevo las preguntas a), b) y c), con referencia a este nuevo circuito.
54. Cuando la corriente en la porción del circuito que se muestra en la figura P32.54 es de 2.00 A y aumenta a una proporción de 0.500 A/s, la diferencia de potencial observada es  $\Delta V_{ab} = 9.00$  V. Cuando la corriente es de 2.00 A y disminuye a la relación de 0.500 A/s, la diferencia de potencial medida es  $\Delta V_{ab} = 5.00$  V. Calcule los valores de  $L$  y  $R$ .

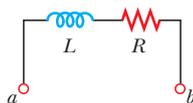


Figura P32.54

55. Una corriente variable en el tiempo  $I$  viaja a través de un inductor de 50.0 mH, como se muestra en la figura P32.55. Elabore una gráfica del potencial en el punto  $b$  en relación con el potencial en el punto  $a$ .

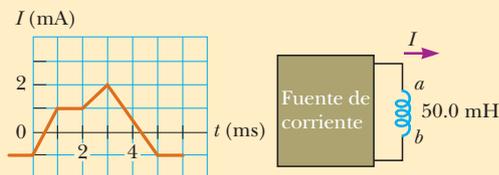


Figura P32.55

56. ● Considere un circuito en serie que consiste en un capacitor de 500  $\mu$ F, un inductor de 32.0 mH y un resistor  $R$ . Explique qué puede decir acerca de la frecuencia angular de oscilaciones para a)  $R = 0$ , b)  $R = 4.00 \Omega$ , c)  $R = 15.0 \Omega$  y d)  $R = 17.0 \Omega$ . Relacione la descripción matemática de la frecuencia

angular con la frecuencia angular experimentalmente mensurable.

57. ● El toroide de la figura P32.57 está constituido por  $N$  vueltas y tiene una sección transversal rectangular. Sus radios interno y externo son  $a$  y  $b$ , respectivamente. a) Demuestre que la inductancia del toroide es

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

- b) Con este resultado, calcule la inductancia de un toroide de 500 vueltas para el cual  $a = 10.0$  cm,  $b = 12.0$  cm y  $h = 1.00$  cm. c) **¿Qué pasaría si?** En el problema 8 se dedujo una expresión aproximada para la inductancia de un toroide de  $R \gg r$ . Para tener una idea de la precisión de ese resultado, utilice la expresión del problema 8 para calcular la inductancia aproximada del toroide descrito en el inciso b). Compare este resultado con el del inciso b).

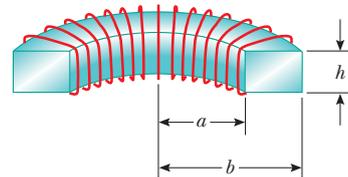


Figura P32.57

58. a) Una bobina circular y plana realmente no produce un campo magnético uniforme en el área que encierra. No obstante, estime la inductancia de una bobina plana, circular y compacta, con un radio  $R$  y  $N$  vueltas, al suponer que el campo en su centro es uniforme en toda el área. b) Un circuito de una mesa de laboratorio está constituido por una batería de 1.5 V, un resistor de 270  $\Omega$ , un interruptor y tres cables de unión de 30 cm de largo que los conectan. Suponga que el circuito se arregla de forma circular. Piense en él como si fuera una bobina plana de una sola vuelta. Calcule el orden de magnitud de su inductancia y c) de la constante de tiempo describiendo la rapidez con que aumenta la corriente cuando se cierra el interruptor.

59. En  $t = 0$ , se cierra el interruptor abierto de la figura P32.59. Utilizando las reglas de Kirchhoff para las corrientes y voltajes instantáneos en este circuito de dos espiras, demuestre que la corriente en el inductor en el tiempo  $t > 0$  es igual a

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} [1 - e^{-(R'/L)t}]$$

donde  $R' = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ .

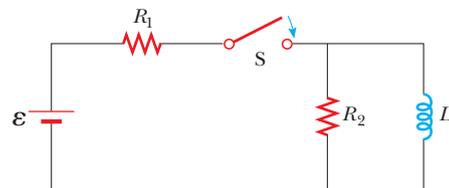


Figura P32.59

60. Un alambre hecho de un material no magnético, de radio  $R$ , lleva una corriente uniformemente distribuida en su sección transversal. La corriente total que conduce el alambre es  $I$ . Demuestre que la energía magnética por cada unidad de longitud en el interior del alambre es  $\mu_0 I^2 / 16\pi$ .

2 = intermedio; 3 = desafiante; ■ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

61. En la figura P32.61, el interruptor está cerrado durante  $t < 0$ , y se establecen condiciones de estado estable. Luego se abre en  $t = 0$ . a) Determine la fem inicial  $\mathcal{E}_0$  a través de  $L$  justo después de  $t = 0$ . ¿Qué extremo de la bobina  $a$  o bien  $b$  está a un mayor potencial? b) Grafique a mano las corrientes en  $R_1$  y en  $R_2$  como una función del tiempo, tome las direcciones del estado estable como positivas. Muestre valores antes y después de  $t = 0$ . c) ¿Cuánto tiempo después de  $t = 0$  la corriente en  $R_2$  llega a tener el valor de 2.00 mA?

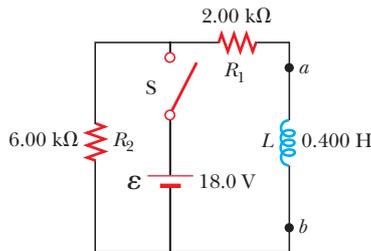


Figura P32.61

62. ● Los alambres de entrada de una antena de televisión a menudo se fabrican en forma de dos alambres paralelos (figura P32.62). Los dos alambres conducen corrientes de igual magnitud en direcciones opuestas. Considere que los alambres conducen la corriente distribuida de manera uniforme en sus superficies y no existe campo magnético dentro del alambre. a) ¿Por qué esta configuración de conductores tiene inductancia? b) ¿Qué constituye la espira de flujo en esta configuración? c) Demuestre que la inductancia de un tramo  $x$  de este tipo de cable de entrada es

$$L = \frac{\mu_0 x}{\pi} \ln \left( \frac{w - a}{a} \right)$$

donde  $a$  es el radio de los alambres y  $w$  la separación entre los centros.

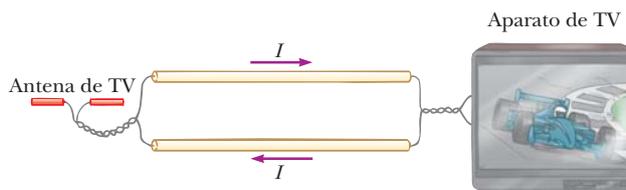


Figura P32.62

63. Para impedir daños por arco eléctrico en un motor eléctrico, a veces se coloca un resistor de descarga en paralelo con la armadura. Si el motor se desconecta de manera repentina mientras está en operación, este resistor limita el voltaje que se presenta en las terminales de la armadura de la bobina. Considere un motor CD de 12.0 V con una armadura que tiene una resistencia de  $7.50 \Omega$  y una inductancia de 450 mH. Suponga que la magnitud de la fem autoinducida en las bobinas de la armadura es de 10.0 V cuando el motor funciona a una rapidez normal. (El circuito equivalente de la armadura se muestra en la figura P32.63.) Calcule la resistencia máxima  $R$  que limita a 80.0 V el voltaje en las terminales de la armadura cuando el motor se desconecta.

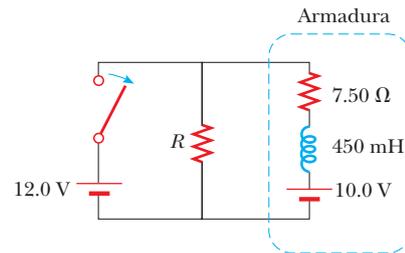


Figura P32.63

**Problemas de repaso.** Los problemas 64 al 67 aplican ideas de este y capítulos previos para algunas propiedades de los superconductores, que fueron introducidos en la sección 27.5.

64. *La resistencia de un superconductor.* En un experimento llevado a cabo por S. C. Collins entre 1955 y 1958, se mantuvo una corriente en un anillo de plomo superconductor durante 2.50 años sin observar pérdidas. Si la inductancia en el anillo era de  $3.14 \times 10^{-8} \text{ H}$  y la sensibilidad del experimento era de una parte en  $10^9$ , ¿cuál era la máxima resistencia del anillo? (*Sugerencia:* Trate al anillo como un circuito  $RL$ , con decaimiento de la corriente y recuerde que  $e^{-x} \approx 1 - x$  cuando  $x$  es pequeña.)
65. Se ha propuesto un nuevo método para almacenar energía. Se fabrica una enorme bobina subterránea superconductora de 1.00 km de diámetro que conduciría una corriente máxima de 50.0 kA en cada embobinado de un solenoide de  $\text{Nb}_3\text{Sn}$  de 150 vueltas. a) Si la inductancia de esta enorme bobina fuera de 50.0 H, ¿cuál sería la energía total almacenada?, y b) ¿cuál sería la fuerza de compresión por cada metro que actúa entre dos embobinados adyacentes a 0.250 m de distancia?
66. *Transmisión superconductora de energía.* Se ha propuesto el uso de los superconductores para las líneas de transmisión de energía. Un solo cable coaxial (figura P32.66) podría conducir  $1.00 \times 10^3 \text{ MW}$  (la salida de una gran planta eléctrica) a 200 kV, CD, a lo largo de una distancia de 1000 km sin pérdidas. Un alambre interno con un radio de 2.00 cm, hecho del superconductor  $\text{Nb}_3\text{Sn}$ , lleva la corriente  $I$  en una dirección. Un cilindro superconductor le rodea, con un radio de 5.00 cm, y lleva la corriente de retorno  $I$ . En dicho sistema, ¿cuál es el campo magnético a) en la superficie del conductor interno o b) en la superficie interna del conductor externo? c) ¿Cuánta energía se almacenaría en el espacio entre los conductores en una línea de transmisión superconductora de 1000 km? d) ¿Cuál sería la presión ejercida sobre el conductor externo?

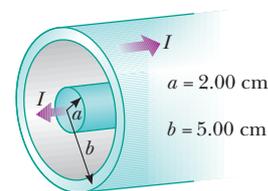


Figura P32.66

67. ● *El efecto Meissner.* Compare este problema con el problema 57 del capítulo 26, respecto a la fuerza que atrae un dieléctrico perfecto en un campo eléctrico intenso. Una propiedad fundamental de un material superconductor del tipo I es el *diamagnetismo perfecto*, es decir, la demostración del *efecto Meissner*.

2 = intermedio; 3 = desafiante; ■ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

ner, que se ilustra en la figura 30.27 en la sección 30.6 y que se describe como sigue. El material superconductor tiene  $\vec{B} = 0$  en cualquier sitio en el interior. Si se coloca una muestra del material en un campo magnético producido externamente, o si se enfría para hacer de él un superconductor mientras está en un campo magnético, aparecen corrientes eléctricas en la superficie de la muestra. Las corrientes tienen justo la intensidad y la dirección necesarias para que el campo magnético sea igual a cero en todo su interior de la muestra. Este problema ayudará a comprender la fuerza magnética que puede actuar sobre la muestra superconductora.

Un solenoide vertical con una longitud de 120 cm y un diámetro de 2.50 cm está constituido por 1400 vueltas de alambre de cobre que lleva una corriente contraria al sentido de las manecillas del reloj de 2.00 A, como se observa en la figura P32.67a. a) Determine el campo magnético en el vacío en el interior del solenoide. b) Determine la densidad de energía del campo magnético y observe que las unidades  $J/m^3$  de densidad de energía son las mismas que las unidades  $N/m^2$  de la presión. c) Ahora se inserta parcialmente en el solenoide una barra superconductora de 2.20 cm de diámetro. Su extremo superior está muy lejos del solenoide, donde el campo magnético es despreciable. El extremo inferior de la barra está profundamente incrustado en el solenoide. Explique cómo identificar la dirección que requiere la corriente en la superficie curva de la barra, para que el campo magnético total en el interior de

la barra sea igual a cero. En la figura P32.67b se dibuja el campo producido por las supercorrientes, y en la figura P32.67c se encuentra el campo total. d) El campo del solenoide ejerce una fuerza sobre la corriente en el superconductor. Explique cómo determinar la dirección de la fuerza sobre la barra. e) Calcule la magnitud de la fuerza multiplicando la densidad de energía del campo del solenoide por el área del extremo inferior de la barra superconductora.

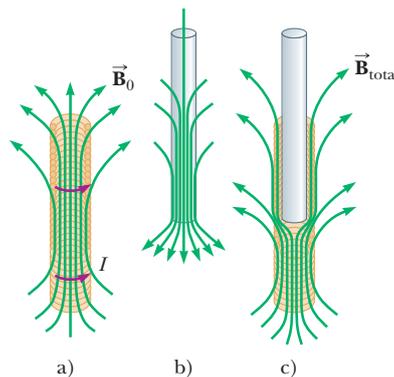


Figura P32.67

## Respuestas a las preguntas rápidas

- 32.1 c), f) Para la corriente constante en a) y b) no hay diferencia de potencial en las terminales del inductor sin resistencia. En c), si aumenta la corriente, la fem inducida en el inductor tendrá una dirección opuesta, de  $b$  a  $a$ , lo que hace más grande en potencial a  $a$  que a  $b$ . De manera similar, en f) la corriente que disminuye induce una fem en la misma dirección que la corriente, de  $b$  a  $a$ , lo que de nuevo provoca que el potencial de  $a$  sea más alto que el de  $b$ .
- 32.2 i) b) Como el interruptor está cerrado, no hay corriente, por lo que no hay voltaje a través del resistor. ii), a) Después de mucho tiempo, la corriente llega a su valor final, y el inductor ya no afecta al circuito.
- 32.3 a), d) Porque la densidad de energía depende de la magnitud del campo magnético, para aumentar la densidad de ener-

- gía debemos aumentar el campo magnético. En el caso de un solenoide,  $B = \mu_0 nI$ , donde  $n$  es el número de vueltas por cada unidad de longitud. En a), incrementa  $n$  para aumentar el campo magnético. En b), el cambio en el área de sección transversal no tiene efecto sobre el campo magnético. En c) si aumenta la longitud y mantiene fija a  $n$ , no hay ningún efecto sobre el campo magnético. Aumentando la corriente en d) aumenta el campo magnético en el solenoide.
- 32.4 a)  $M$  aumenta debido a que el flujo magnético aumenta a través de la bobina 2.
- 32.5 i) b) Si la corriente está en su valor máximo, la carga del capacitor es igual a cero. ii) c) Si la corriente es igual a cero, es el instante en el cual el capacitor se encuentra completamente cargado y la corriente está a punto de cambiar de dirección.

2 = intermedio; 3 = desafiante; ■ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo