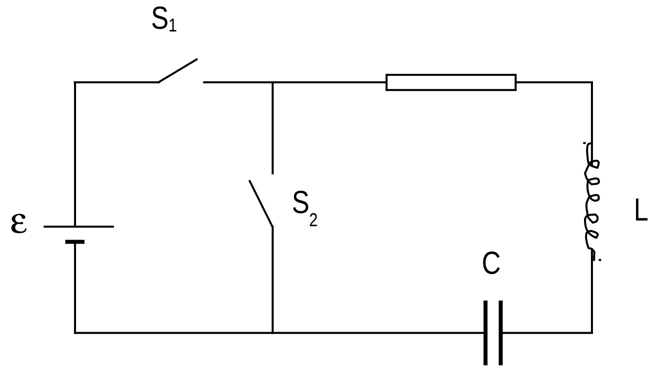
CIRCUITO R-L-C

Estudiaremos el transitorio del circuito de la figura a partir del instante en que se cierra el interruptor S_1 hasta que el capacitor se encuentre totalmente cargado, y la descarga del mismo cerrando S_2 y abriendo S_1.
En todo instante, para el transitorio de carga, vale:



$$\varepsilon = R\, i + L\, di/dt + q/C \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta que $i = dq/dt$:

$$\varepsilon = R\, dq/dt + L\, dq^2/dt^2 + q/C$$

Reordenando:

$$L\, dq^2/dt^2 + R\, dq/dt + q/C = \varepsilon$$

Multiplicando ambos miembros por C:

$$LC\, dq^2/dt^2 + RC\, dq/dt + q = C\varepsilon \qquad (2)$$

Debemos resolver:

$$LC\, dq^2/dt^2 + RC\, dq/dt + q = 0 \qquad (3)$$

y luego sumarle la constante $C\varepsilon$. La solución a la ecuación igualada a cero es del tipo

$$q(t) = A\, e^{st} \qquad (4)$$

de modo que:

$$dq/dt = s\, A\, e^{st} \qquad (5)$$

$$d^2q/dt^2 = s^2\, A\, e^{st} \qquad (6)$$

reemplazando (4), (5) y (6) en la ec. (3):

$$(s^2\, LC + s\, RC + 1)\, A\, e^{st} = 0 \qquad (7)$$

que implica:

$$(s^2\, LC + s\, RC + 1) = 0 \qquad (8)$$

cuyas raíces son:

$$s_{1,2} = -R/2L \pm \{(R/2L)^2 - 1/LC\}^{1/2} \qquad (9)$$

por lo que la solución general será del tipo:

$$q(t) = C\varepsilon + A_1\, e^{s1t} + A_2\, e^{s2t} \qquad (10)$$

donde las constantes A_1 y A_2 quedan determinadas por las condiciones iniciales. En nuestro caso particular:

$$q(0) = 0 \qquad i(0) = 0 \qquad (11)$$

la primera condición, porque el capacitor está inicialmente descargado y la segunda, porque la corriente antes de cerrar el interruptor es nula y no puede cambiar instantaneamente (implicaría una tensión infinita en la inductancia, di/dt infinita). Con estas dos condiciones:

$$C\varepsilon + A_1 + A_2 = 0$$
$$s_1 A_1 + s_2 A_2 = 0 \qquad (12)$$

resolviendo simultáneamente estas dos ecuaciones:

$$A_1 = -C\varepsilon\, s_2/(s_1 - s_2)$$
$$A_2 = C\varepsilon\, s_1/(s_1 - s_2) \qquad (13)$$

La respuesta transitoria dependerá de los valores de las raíces. Los tres casos posibles son:

$(R/2L)^2 < 1/LC$	Complejas conjugadas con parte real negativa	Respuesta subamortiguada u oscilatoria
$(R/2L)^2 = 1/LC$	Reales, iguales y negativas	Respuesta criticamente amortiguada
$(R/2L)^2 > 1/LC$	Reales, distintas y negativas	Respuesta sobreamirtiguada

Introducimos las siguientes notaciones:

$$\boldsymbol{\omega_0 = (1/LC)^{1/2} \qquad \alpha = R/2L} \qquad (14)$$

con lo que las raíces quedan expresadas:

$$s_{1,2} = -\ \alpha \pm\ (\alpha^2 - \omega_0^2)^{1/2} \qquad (15)$$

Las soluciones para los tres casos, en el transitorio de carga del capacitor, son:

1)Respuesta sobreamortiguada: es la suma de dos exponenciales decrecientes.

Expresando las raíces (reales) como:

$$s_{1,2} = -\ \alpha \pm\ \beta \qquad (16)$$

donde $\beta = (\ \alpha^2 - \omega_0^2)^{1/2}$. De las ecuacions (13):

$$A1 = -C\varepsilon\, (\alpha + \beta) / 2\ \beta$$
$$A_2 = -C\varepsilon\, (-\alpha + \beta) / 2\ \beta \qquad (17)$$

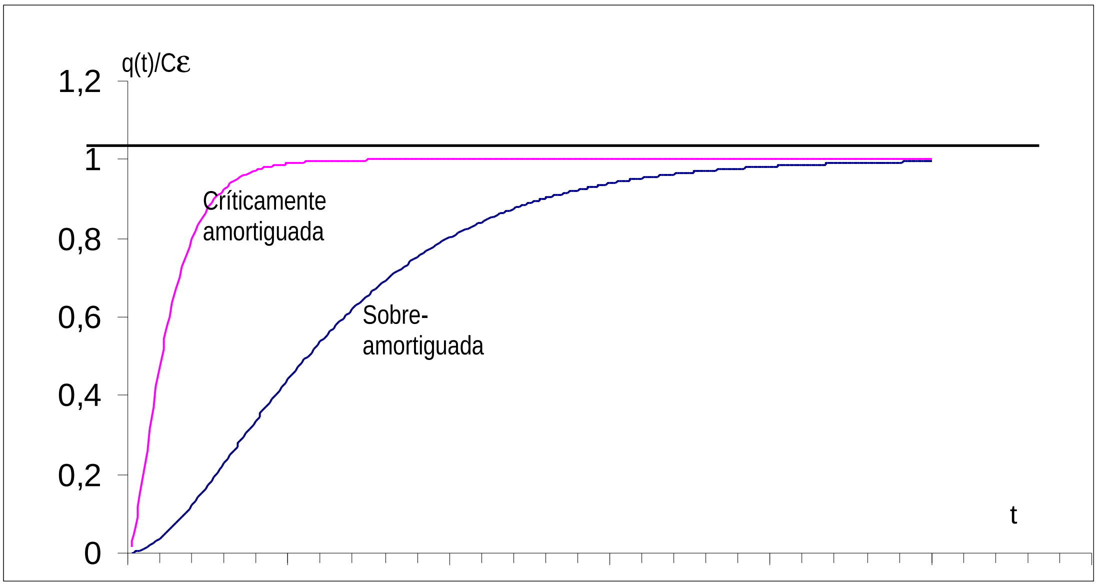
Y la ec. (10) queda expresada como:

$$q(t) = C\varepsilon\{1 - (1/2\beta)[(\alpha+\beta)\ e^{(-\alpha+\beta)t} + (-\alpha+\beta)e^{(-\alpha-\beta)t}]\} \qquad (18)$$

2) Respuesta críticamente amortiguada

$$s_{1,2} = -\ \alpha \qquad (19)$$

$$q(t) = C\varepsilon[1 - (1 + \omega_0 t)\ e^{-\alpha t}\ ] \qquad (20)$$



3) Respuesta oscilatoria: expresamos la ec. (7) como:

$$s_{1,2} = -\ \alpha \pm\ j\ \omega_d \qquad (21)$$

donde $\boldsymbol{\omega_d = +\ (\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2}}$, de manera que la solución será:

$$q(t) = C\varepsilon + A_1\ e^{(-\alpha + j\ \omega d)\ t} + A_2\ e^{(-\alpha - j\ \omega d)\ t}$$

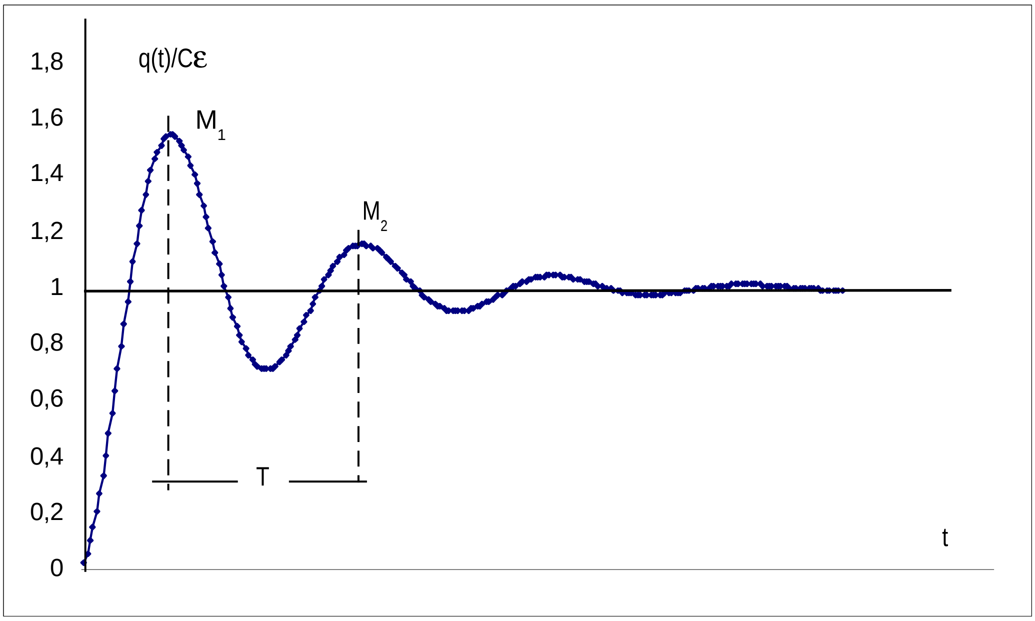
$$q(t) = C\varepsilon + [A_1\ e^{j\ \omega d\ t} + A_2\ e^{-j\ \omega d\ t}]\ e^{-\alpha t} \qquad (22)$$

de las condciones iniciales:

$$A_1 = A_2 = -\ C\varepsilon/2$$

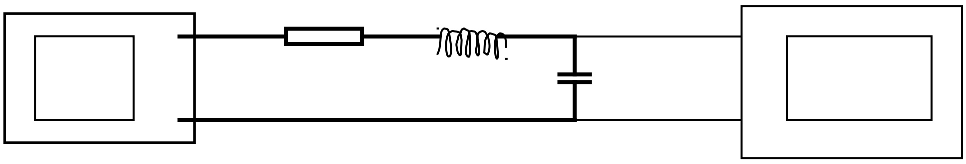
$$q(t) = C\varepsilon\ [1 – (e^{j\ \omega d\ t} + e^{-j\ \omega d\ t})\ e^{-\alpha t} / 2]$$

$$q(t) = C\varepsilon\ (1 - e^{-\alpha t} \cos \omega_d t) \qquad (23)$$



La tensión en el capacitor alcanza su valor estacionario siguiendo una oscilación cosenoidal amortiguada por una exponencial decreciente siendo α el coeficiente de amortiguamiento. La frecuencia angular es ω_d, menor que ω_0. Esta última es la frecuencia con que oscilaría si la resistencia fuera nula ($\alpha = 0$).

En el trabajo de laboratorio se observará, utilizando un osciloscopio, los cambios en la respuesta del sistema al variar los parámetros R, L y C. En el caso subamortiguado se determinarán experimentalmente los valores de ω_d y α contrastándolos con los valores calculados (se conocen L, R y C). Los tres elementos en serie se alimentan con una tensión variable tipo onda cuadrada y se observa, sobre el capacitor, la tensión en función del tiempo (proporcional a la carga)



La frecuencia se determina midiendo el período sobre el eje de tiempo del osciloscopio, entre dos máximos consecutivos de la cosenoidal. Para determinar el amortiguamiento se mide la amplitud de la oscilación en los mismos máximos respecto a la tensión estacionaria, de manera que:

$$M_1 = e^{-\alpha t} \cos \omega_d t$$

$$M_2 = e^{-\alpha(t+T)} \cos \omega_d (t+T)$$

Dividiendo miembro a miembro y teniendo en cuenta que $\cos \omega_d t = \cos \omega_d (t+T)$

$$M_2/M_1 = e^{-\alpha T}$$

$$\alpha = (1/T) \ln (M_1/M_2)$$