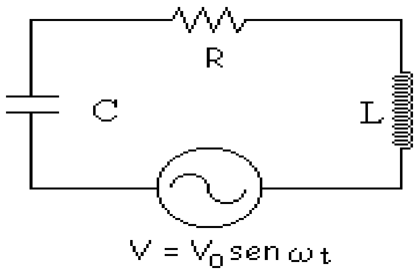
OSCILACIONES FORZADAS y RESONANCIA

Analizaremos un circuito R-L-C serie alimentado con una fem alterna $v(t) = V \text{ sen } \omega t$



$$V \text{ sen } \omega t = R i + L\, di/dt + q/C \qquad (1)$$

Diferenciando respecto al tiempo y teniendo en cuenta que $i = dq/dt$:

$$\omega V \cos \omega t = L\, di2/dt2 + R\, di/dt + i/C \qquad (2)$$

La solución es del tipo:

$$I(t) = I \text{ sen } (\omega t - \varphi) \qquad (3)$$

$$di/dt = \omega I \cos (\omega t - \varphi)$$

$$d^2i/dt^2 = -\omega^2 I \text{ sen } (\omega t - \varphi)$$

Reemplazando en (2):

$$\omega V \cos \omega t = -L \omega^2 I \text{ sen } (\omega t - \varphi) + R \omega I \cos (\omega t - \varphi) + I \text{ sen } (\omega t - \varphi)/C \qquad (4)$$

Reagrupando:

$$R I \cos (\omega t - \varphi) – (L \omega - 1/C\omega) I \text{ sen } (\omega t - \varphi) = V \cos \omega t$$

Reemplazando $\cos (\omega t - \varphi)$ y $\text{sen } (\omega t - \varphi)$ por las respectivas funciones seno y coseno de ωt y φ:

$$R I \cos \omega t \cos \varphi + RI \text{ sen } \omega t \text{ sen } \varphi – (L \omega - 1/C\omega) I \text{ sen } \omega t \cos \varphi +$$
$$+ (L \omega - 1/C\omega) I \cos \omega t \text{ sen } \varphi - V \cos \omega t = 0$$

$$[R I \cos \varphi + (L \omega - 1/C\omega) I \text{ sen } \varphi - V] \cos \omega t + [R I \text{ sen } \varphi – (L \omega - 1/C\omega) I \cos \varphi] \text{ sen } \omega t = 0 \qquad (5)$$

Como la igualdad debe cumplirse para todo t, los factores que multiplican a $\text{sen } \omega t$ y $\cos \omega t$ deben ser nulos:

$$R \cos \varphi + (L \omega - 1/C\omega) \text{ sen } \varphi = V/I \qquad (6)$$

$$R \text{ sen } \varphi – (L \omega - 1/C\omega) \cos \varphi = 0 \qquad (7)$$

De (6) obtenemos:

$$\text{tg } \varphi = (L\omega - 1/C\omega) / R$$

$$\boldsymbol{\varphi = \text{arctg } (L\omega - 1/C\omega) / R} \qquad (8)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones (6) y (7) y sumando miembro a miembro, obtenemos:

$$R^2 + (L \omega - 1/C\omega)^2 = (V/I)^2$$

De donde:

$$\mathbf{I = V / [R^2 + (L\,\omega - 1/C\omega)^2]^{1/2}} \quad (9)$$

La solución (3) quedará expresada como:

$$\mathbf{I(t) = \{V / [R^2 + (L\,\omega - 1/C\omega)^2]^{1/2}\}\ sen\ (\omega\ t - \varphi)}$$

Obsérvese que el término que divide a la tensión V tiene unidades de resistencia (se la denomina, en corriente alterna, impedancia). El valor de la corriente es máximo (resonancia) cuando el denominador de la ec. (9) es mínimo, es decir cuando:

$$(L\,\omega - 1/C\omega) = 0$$

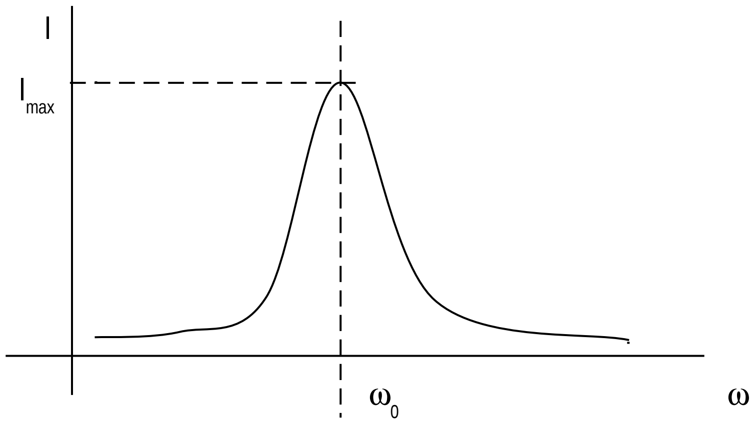
Para valores de R, L y C dados, la frecuencia angular que satisface la ecuación anterior es:

$$\omega_0 = (1/LC)^{1/2} \quad (10)$$

Es decir, si la frecuencia de la exitación (la tensión alterna que alimenta los elementos en serie) coincide con la frecuencia natural ω_0, el módulo de la corriente alcanza su valor máximo:

$$Imax = V / R$$

La amplitud de la corriente, función de la frecuencia, ec. (9), queda representada por la curva:



La corriente sigue una ley senoidal, adelantada o atrasada en φ según:

$$(L\,\omega - 1/C\omega) > 0 \quad \omega > \omega_0$$

$$(L\,\omega - 1/C\omega) < 0 \quad \omega < \omega$$

El objetivo del laboratorio es:

a)Graficar I vs. ω. Para ello se elige la frecuencia del oscilador igual a la de resonancia y se mide en el osciloscopio I_{max}. Luego se hacen tres o cuatro determinaciones para frecuencias mayores y menores. Repetir con un valor de resistencia distinto, dejando fijos C y L, y observar como se modifica la curva.

b)Observar el desfasaje entre corriente y tensión en función de la frecuencia, utilizando los dos canales del osciloscopio (uno para tensión del oscilador y el otro para la caída en la resistencia, proporcional a la corriente).

Los siguientes sitios contienen simuladores interactivos que muestran la curva I vs. ω y el desfasaje entre tensión y corriente:

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/induccion/alterna1/alterna1.htm
http://www.tsc.uc3m.es/docencia/SyC/RLC/RLCsin.html