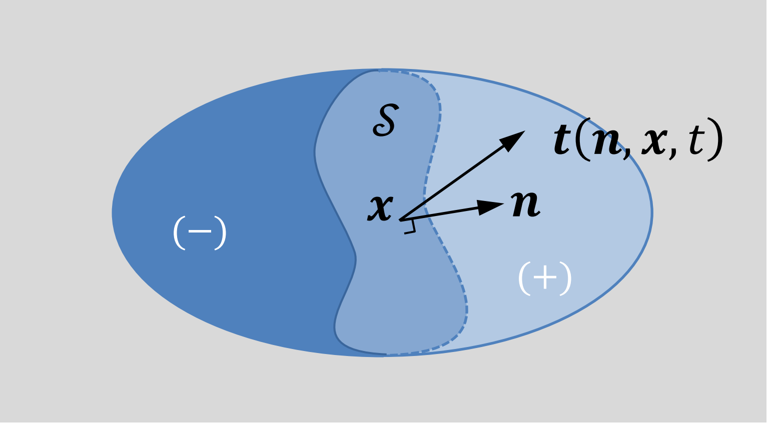
Mecánica del Continuo

2016

Principios básicos



1) Derive el teorema local de conservación de la masa $\dot{\rho}+\rho div\boldsymbol{v}=0$, tomando la derivada material de la expresión $\rho=\rho_R/J$

2) Derive la expresión $\int_{\mathcal{P}_t}\varphi(\boldsymbol{X},t)\rho(\boldsymbol{X},t)dv(\boldsymbol{X})=\int_{\mathcal{P}}\varphi(\chi(\boldsymbol{X},t),t)\rho_R((\boldsymbol{X})dv_R(\boldsymbol{X})$ con respecto al tiempo para obtener:

$$\dot{\overline{\int_{\mathcal{P}_t}\rho\varphi dv}}=\int_{\mathcal{P}_t}\rho\dot{\varphi}dv$$

3) Muestre que los balances locales de fuerzas $div\boldsymbol{T}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ y momentos $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^T$, implican el balance global $\int_{\partial\mathcal{P}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}da+\int_{\mathcal{P}}\boldsymbol{b}dv=\boldsymbol{0}$

4) Definimos un tensor de tensiones medio $\overline{\boldsymbol{T}}$ mediante la expresión:

$$vol(\mathcal{P})\overline{\boldsymbol{T}}=\int_{\mathcal{P}}\boldsymbol{T}dv$$

a- (Teorema de Signorini´s) Muestre que $\overline{\boldsymbol{T}}$ es determinado por la tracción superficial $\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}$ en $\partial\mathcal{P}$ y la fuerza volumétrica $\boldsymbol{b}$ de la siguiente manera:

$$vol(\mathcal{P})\overline{\boldsymbol{T}}=\int_{\partial\mathcal{P}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{r}\,da+\int_{\mathcal{P}}\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{r}dv$$

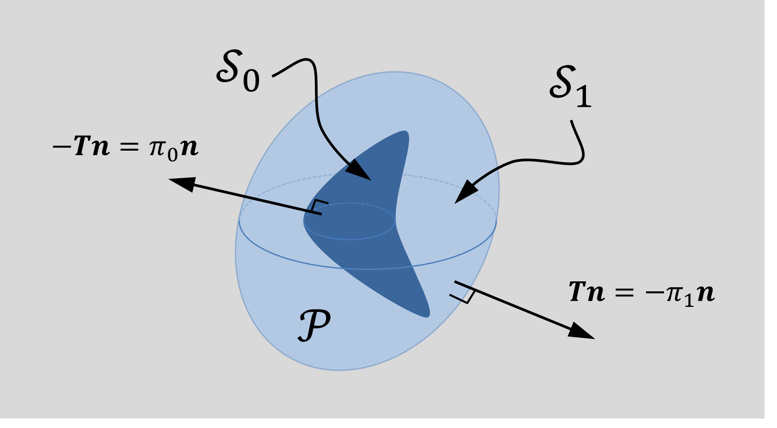
b- Considere $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ y que $\partial\mathcal{P}$consiste en dos superficies $\mathcal{S}_0$ y $\mathcal{S}_1$ donde $\mathcal{S}_1$ encierra a $\mathcal{S}_0$ como se ilustra en la figura. Considere que sobre ambas superficies se aplican una presión uniforme, π_0 y π_1 respectivamente, de forma que:

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}=\begin{cases}-\pi_0\boldsymbol{n}\ en\ \mathcal{S}_0\\-\pi_1\boldsymbol{n}\ en\ \mathcal{S}_1\end{cases}$$

Muestre que $\overline{\boldsymbol{T}}$ es esférico con una presión:

$$\bar{p} = -\frac{\pi_1 V_1 - \pi_0 V_0}{V_1 - V_0}$$

Donde V_0 y V_1 representan los volúmenes encerrados por las superficies $\mathcal{S}_0$ y $\mathcal{S}_1$ respectivamente.



5) Considere la siguiente expresión constitutiva para la inercia:

$$\boldsymbol{\iota} \equiv \boldsymbol{0}$$

con $\boldsymbol{\iota} = -\rho \dot{\boldsymbol{v}}$, muestre que:

a- $\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{b}_0$
b- $\frac{1}{2}\rho\overline{|v|^2}^{\boldsymbol{\cdot}} \equiv 0$
c- $\overline{\mathcal{K}(\mathcal{P}_t)}^{\boldsymbol{\cdot}} \equiv 0$
d- $\mathcal{W}(\mathcal{P}_t) \equiv \mathcal{W}_0(\mathcal{P}_t)$
e- $\mathcal{W}_0(\mathcal{P}_t) \equiv \mathcal{I}(\mathcal{P}_t)$
donde $\mathcal{P}_t$ es una región arbitraria convectiva con el cuerpo.

6) Muestre que:

$$\boldsymbol{T} = J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{T}_{RR}\boldsymbol{F}^T$$

donde $\boldsymbol{T}_{RR}$ es el segundo tensor de Piola.

7) Muestre que:

$$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{D} = J^{-1}\boldsymbol{T}_{RR}\dot{\boldsymbol{E}}$$

8) El estado de tensiones en un cierto punto de un cuerpo está dado por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} Mpa$$

a- Encontrar el vector tensión en un punto de un plano cuya normal está en la dirección $2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$
b- Determinar la magnitud de los esfuerzos normal y tangencial den dicho plano.

9) El estado de tensiones en un cierto cuerpo está dado por:

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 0 & 100x_1 & -100x_2 \\ 100x_1 & 0 & 0 \\ -100x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a- Encontrar el vector tensión que actúa en un plano que pasa por el punto $(1/2, \sqrt{3}/2, 3)$, y es tangente a la superficie cilíndrica $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 1$ en dicho punto.

10) Considere la siguiente distribución de tensiones:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \alpha x_2 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con α, β, constantes.

a- Determinar y dibujar la distribución del vector tensión que actúa en un cuadrado localizado en el plano $x_1 = 0$ con vértices en $(0,1,1), (0,-1,1), (0,1,-1)$ y $(0,-1,-1)$.

b- Encontrar la fuerza y momento resultantes alrededor del origen de los vectores tensión actuando en el cuadrado del inciso anterior.

11) Considere la siguiente distribución de tensiones:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \alpha x_2 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con α, β, constantes.

a- Determinar y dibujar la distribución del vector tensión que actúa en un cuadrado localizado en el plano $x_1 = 0$ con vértices en $(0,1,1), (0,-1,1), (0,1,-1)$ y $(0,-1,-1)$.

b- Encontrar la fuerza y momento resultantes alrededor del origen de los vectores tensión actuando en el cuadrado del inciso anterior.

12) Un estado de tensiones en el cual solo las únicas componentes no nulas de tensión son un par de tensiones de corte, se denominan corte simple. Tomar $T_{12} = T_{21} = \tau$ y las restantes componentes igual a cero.

a- Determinar los valores y direcciones principales de este estado de tensiones.

b- Encontrar el esfuerzo de corte máximo y el plano donde actúa.

13) Un estado de tensiones en el cual solo las tres componentes normales de tensión no se anulan se llama estado triaxial de tensiones.

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Encontrar el esfuerzo de corte máximo y el plano en el cual actúa.

14) El vector de fuerza volumétrico es $\boldsymbol{b} = -g\boldsymbol{e}_3$, con g una constantes. Considere el siguiente tensor de tensiones:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} x_2 & -x_3 & 0 \\ -x_3 & 0 & -x_2 \\ 0 & -x_2 & T_{33} \end{bmatrix}$$

Encuentre la expresión de T_{33}, de manera que $\boldsymbol{T}$ satisfaga las ecuaciones de equilibrio.