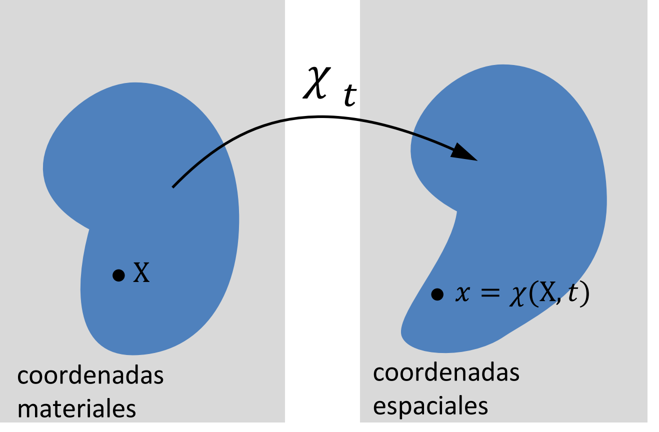
Mecánica del Continuo

2016

Cinemática: parte 1



1) Las siguientes ecuaciones describen el movimiento de las partículas de un cuerpo

$$\boldsymbol{x_1} = \mathbf{X_1} + \mathbf{0,2X_2}\boldsymbol{t}$$
$$\boldsymbol{x_2} = \mathbf{X_2}$$
$$\boldsymbol{x_3} = \mathbf{X_3}$$

a- En el instante t=0, el cuerpo tiene forma de cubo de lado unitario, como se indica en la figura (1). Determinar la configuración del cuerpo en el instante t=2s.
b- Calcular **F**,**F**$^{-}$ y J, calcular el cambio de volumen.

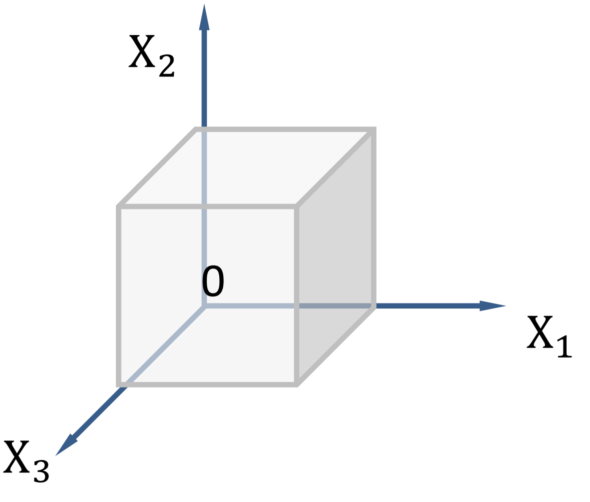


Figura **1**

2) Dada una deformación de la forma:

$$\mathrm{X}_i = a_{ij}x_j + c_i$$

donde a_{ij} y c_i son constantes o funciones del tiempo, se denomina *deformación homogénea*.
Muestre que bajo una deformación homogénea, elementos planos se transforman en elementos planos y líneas rectas en líneas rectas.

3) Muestre que una transformación homogénea es una transformación de cuerpo rígido si y solo si $[a_{ij}]$, es una matriz ortogonal.

4) Dada la siguiente transformación:

$$X_1 = 2x_3$$
$$X_2 = -x_1$$
$$X_3 = -2x_2 - 3x_3$$

a- Calcule **F**, **U**,**V** y **R**.

b- De una interpretación geométrica de la transformación.

5) Demostrar que una deformación es isocórica si y solo si $det\boldsymbol{C} = 1$

6) La siguiente deformación homogénea:

$$X_1 = x_1 + \lambda x_2$$
$$X_2 = x_2$$
$$X_3 = x_3$$

se denomina de *corte puro* (pure shear), para dicha deformación, calcular:

a- Las matrices **F**, **C** y **B**.

b- Los invariante principales de **C** y **B**.

c- Los estiramientos principales.

d- Aplique la deformación al elemento mostrado en la figura (2) y grafique la nueva configuración.

f- Mostrar que $\det(F) = 1$, ¿qué significa?

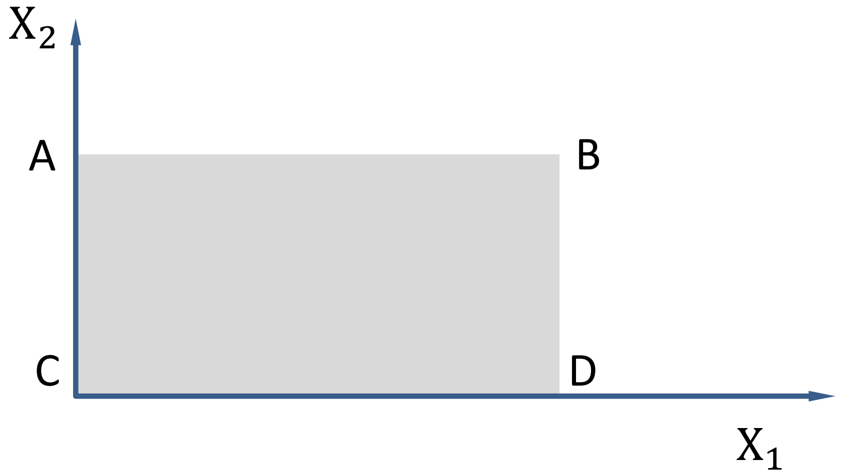


Figura **2**

7) Demostrar que los invariantes principales de **C** son:

$$I_1(\boldsymbol{C}) = {\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 + {\lambda_3}^2$$
$$I_2(\boldsymbol{C}) = {\lambda_1}^2{\lambda_2}^2 + {\lambda_2}^2{\lambda_3}^2 + {\lambda_3}^2{\lambda_1}^2$$
$$I_3(\boldsymbol{C}) = {\lambda_1}^2{\lambda_2}^2{\lambda_3}^2$$

donde λ_i son los estiramientos principales, ¿qué expresión tienen los invariantes principales de **B**?

8) Calcular **C**,**B** y los invariantes principales para una extensión de magnitud α en la dirección **e**.

9) Una deformación, de la forma:

$$\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{f_1}(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2})$$
$$\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{f_2}(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2})$$
$$\boldsymbol{x_3} = \mathbf{X_3}$$

se denomina deformación plana (plane strain).

a- Probar que en dicha deformación el estiramiento principal $\lambda_1 = 1$.

b- Probar que isocórica si y solo si los otros estiramientos principales satisfacen la relación $\lambda_2 = 1/\lambda_3$.

c- De una interpretación geométrica de la deformación aplicándola a un cubo unitario, grafique el estado inicial y el estado final.

10) Dada la deformación:

$$\boldsymbol{x_1} = \mathbf{X_1} + \mathbf{X_2}$$
$$\boldsymbol{x_2} = \mathbf{X_1} - \mathbf{X_2}$$
$$\boldsymbol{x_3} = \mathbf{X_1} + \mathbf{X_2} - \mathbf{X_3}$$

a- Calcular **F**,**F**$^{-}$y J.

b- Calcular el cambio de volumen.

11) Dada la deformación:

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}({\mathbf{X_1}}^{\mathbf{2}} + {\mathbf{X_2}}^{\mathbf{2}})$$
$$\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{tan}^{-\mathbf{1}}\,(\mathbf{X_2}/\mathbf{X_1})$$
$$\boldsymbol{x_3} = \mathbf{X_3}$$

a- Calcular **F**,**F**$^{-}$ y mostrar que se trata de una transformación isocórica.

12) El tensor de **Green-St. Venant**, se define:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \mathbf{1})$$

a- Muestre que $\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$ si y solo si la deformación aplicada es una deformación de cuerpo rígido.

b- Calcule el tensor de Green-St. Venant de las deformaciones presentadas en los problemas anteriores.

c-Muestre que:

$$I_1(\boldsymbol{C}) = 2I_1(\boldsymbol{E}) + 3$$
$$I_1(\boldsymbol{C}) = 4I_2(\boldsymbol{E}) + 4I_1(\boldsymbol{E}) + 3$$
$$I_1(\boldsymbol{C}) = 8I_3(\boldsymbol{E}) + 4I_2(\boldsymbol{E}) + 2I_1(\boldsymbol{E}) + 1$$

13) Pruebe las siguientes relaciones:

a- $[\boldsymbol{F}^{-1}]_{ij} = \mathrm{X}_{i,j} = \frac{1}{2J}\varepsilon_{irs}\varepsilon_{jpq}x_{p;r}x_{q;s}$

b- $[\boldsymbol{F}]_{ij} = x_{i,j} = \frac{1}{2}J\varepsilon_{irs}\varepsilon_{jpq}\mathrm{X}_{p;r}\mathrm{X}_{q;s}$

c- $[J(\boldsymbol{F}^{-1})^T]_{ij} = \frac{\partial J}{\partial(x_{i;j})}$

d- $div\left(\frac{1}{J}\boldsymbol{F}^T\right) = \mathbf{0}$

e- Demuestre que los tensores **E** y **C** son coaxiales.